ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Κουμουνδούρος Γιάννης

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Μέρος Α

Πίνακας περιεχομένων

Πρόλογος

Θεωρώ ότι η ύλη της Α Λυκείου όπως έχει αυτή εμπλουτιστεί με την Τράπεζα Θεμάτων είναι αρκετά εκτενής και ο χρόνος εκμάθησης της μικρός.

Επομένως, αποφάσισα να διδάξω σε πρώτη φάση την θεωρία και τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου με όσο μεγαλύτερη λεπτομέρεια γίνεται, χωρίς πλατειασμούς σε άλλα πεδία . Εξάλλου αυτή είναι και η εξεταστέα ύλη. Σε επόμενη φάση διδάσκω τις ασκήσεις της Τράπεζας.

Αν ο μαθητής ή η μαθήτρια έχει μαθησιακά κενά από τις προηγούμενες τάξεις τότε εξατομικευμένα επαναλαμβάνουμε μερικά τμήματα της ύλης των προηγούμενων τάξεων.

Μεγάλη έμφαση θα πρέπει να δοθεί ώστε ο μαθητής ή η μαθήτρια να κατακτήσει τον μαθηματικό φορμαλισμό και τον αφαιρετικό τρόπο γραφής. Παρόλα αυτά έχω διατυπώσει τις λύσεις και την θεωρία με επιπλέον πληροφορίες από ότι ένας μαθηματικός οφείλει να κάνει. Ο λόγος είναι καθαρά εκπαιδευτικός.

Φιλικά

Κουμουνδούρος Γιάννης — Σπάρτη, 2 Δεκεμβρίου 2023

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

Φυσικοί είναι οι αριθμοί:

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\} \tag{1}$$

Ακέραιοι είναι οι αριθμοί

$$\mathbb{Z}=\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots \tag{2}$$

Ρητοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν με μορφή κλάσματος, όπου ο αριθμητής και ο παρανομαστής είναι ακέραιοι και ο παρανομαστής δεν πρέπει να είναι μηδέν.

$$\mathbb{Q}=\{\frac{\alpha}{\beta}:\alpha,\beta\in\mathbb{Z},\beta\neq0\} \tag{3}$$

Διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στα μαθηματά μας διότι με αυτούς μπορούμε να κάνουμε πράξεις χωρίς την χρήση αριθμομηχανής.

Άρρητοι είναι αυτοί οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί.

Ενώ **πραγματικοί** αριθμοί ($\mathbb{R}$)είναι όλοι οι αριθμοί είτε οι ρητοί είτε οι άρρητοι.

Θετικοί είναι οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το μηδέν, αλλά δεν είναι το μηδέν. Αντίστοιχα **αρνητικοί** είναι οι αριθμοί που είναι μικρότεροι από το μηδέν και δεν είναι το μηδέν.

Μη αρνητικοί είναι οι θετικοί αριθμοί μαζί με το μηδέν, ενώ **μη θετικοί** είναι οι αρνητικοί αριθμοί μαζί με το μηδέν.

Αντίθετος ενός αριθμού α είναι αυτός ο αριθμός που αν τον προσθέσουμε με το α μάς δίνει άθροισμα μηδέν. Τον συμβολίζουμε με $-\alpha$. Δηλαδή:

$$\alpha+(-\alpha)=0 \tag{4}$$

Αντίστροφος ενός αριθμού α είναι ο αριθμός που αν τον πολλαπλασιάσουμε με το α μας δίνει γινόμενο 1. Τον συμβολίζουμε με $\frac{1}{a}$. Δηλαδή:

$$a\cdot\frac{1}{a}=1 \tag{5}$$

Υπάρχουν δύο πράξεις η **πρόσθεση** και ο **πολλαπλασιασμός**. Η αφαίρεση ορίζεται ως η πρόσθεση του αντιθέτου ενώ η διαίρεση ως ο πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο.

Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το μηδέν γιατί όποιον αριθμό α προσθέσουμε με το μηδέν δίνει πάλι τον ίδιο αριθμό α, δηλαδή:

$$a+0=a \tag{6}$$

Ουδέτερο στοιχείο στον πολλαπλασιασμό είναι το 1, γιατί όποιον αριθμό α πολλαπλασιάσουμε με το 1 δίνει πάλι τον ίδιο αριθμό α, δηλαδή:

$$a\cdot1=a \tag{7}$$

Για να προσθέσουμε δύο αριθμούς α και β, βρίσκουμε αρχικά το πρόσημο του αθροίσματος από το πρόσημο του αριθμού που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και μετά κάνουμε πρόσθεση αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι, ενώ κάνουμε αφαίρεση αν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι, π.χ.

$$(+2)+(+3)=+5$$

$$(-2)+(+3)=+1$$

$$(-2)+(-3)=-5$$

$$(+2)+(-3)=-1$$

Για να αφαιρέσουμε δύο αριθμούς, προσθέτουμε τον αντίθετο, δηλαδή:

$$(+\alpha)-(+\beta)=(+\alpha)+(-\beta) \tag{8}$$

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς, βάζουμε στο γινόμενο θετικό πρόσημο αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι και αρνητικό αν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι και μετά κάνουμε τον πολλαπλασιασμό κανονικά, π.χ.

$$(+2)\cdot(+3)=+6$$

$$(-2)\cdot(+3)=-6$$

$$(-2)\cdot(-3)=+6$$

$$(+2)\cdot(-3)=-6$$

Για να διαιρέσουμε δύο αριθμούς α και $\beta\neq0$ μετατρέπουμε την διαίρεση σε πολλαπλασιασμό αφού αντιστρέψουμε τον δεύτερο, δηλαδή:

$$\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta} \tag{9}$$

Προσέχουμε πάρα πολύ, γιατί δεν ορίζεται η διαίρεση με το μηδέν.

Αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση ή στον πολλαπλασιασμό είναι η ιδιότητα που μας επιτρέπει να προσθέτουμε ή να πολλαπλασιάζουμε δύο αριθμούς με όποια σειρά θέλουμε:

$$a+\beta=\beta+a \tag{10}$$

$$a\cdot\beta=\beta\cdot a \tag{11}$$

Προσεταιριστική ιδιότητα στην πρόσθεση ή στον πολλαπλασιασμό είναι η ιδιότητα που μας επιτρέπει να προσθέσουμε ή να πολλαπλασιάσουμε τρεις αριθμούς με όποια σειρά θέλουμε:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \tag{12}$$

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \tag{13}$$

Οι παρενθέσεις καθορίζουν την σειρά των πράξεων. Έχουν προτεραιότητα οι εσωτερικές παρενθέσεις. Παρενθέσεις και αγκύλες είναι ισοδύναμες. Γενικά οι πράξεις πρέπει να εκτελούνται με την παρακάτω σειρά (**προτεραιότητα πράξεων**):

(1) Παρενθέσεις, αγκύλες, απόλυτες τιμές

(2) δυνάμεις, ρίζες

(3) πολλαπλασιασμός, διαίρεση,

(4) πρόσθεση, αφαίρεση.

Επιμεριστική ιδιότητα είναι η παρακάτω:

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \tag{14}$$

Οι δυνάμεις ορίζονται με τους παρακάτω τύπους:

$$\alpha^0=1 \tag{15}$$

$$\alpha^1=\alpha \tag{16}$$

$$\alpha^\nu=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha \text{ , για } \nu>1 \tag{17}$$

$$\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu} \tag{18}$$

και έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

$$(\alpha\cdot\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu} \qquad (19)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} \qquad (20)$$

$$\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda} \qquad (21)$$

$$\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda} \qquad (22)$$

$$(\alpha^{\kappa})^{\lambda}=\alpha^{\kappa\cdot\lambda} \qquad (23)$$

Α1 Δίνεται η παράσταση:

$$A=[(x^2y^3)^{-2}\cdot(xy^3)^4]:\left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$$

(i) Να δείξετε ότι $A=x^9\cdot y^9$

(ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x=2010$ και $y=\frac{1}{2010}$

Λύση:

$$A=[(x^2y^3)^{-2}\cdot(xy^3)^4]:\left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$$

Μετατρέπω την διαίρεση σε πολλαπλασιασμό ιδιότητα 9:

$$A=(x^2y^3)^{-2}\cdot(xy^3)^4\cdot\left(\frac{y^{-1}}{x^3}\right)^{-3}$$

Εφαρμόζω την ιδιότητα 23:

$$A=x^{-4}\cdot y^{-6}\cdot x^4\cdot y^{12}\cdot\frac{y^3}{x^{-9}}$$

Εφαρμόζω τις ιδιότητες 21 και 22:

$$A=x^{-4+4+9}\cdot y^{-6+12+3}=x^9\cdot y^9$$

Εφαρμόζω την ιδιότητα 19

$$A=x^9\cdot y^9=(x\cdot y)^9$$

Θέτω $x=2010$ και $y=\frac{1}{2010}$:

$$A=\left(2010\cdot\frac{1}{2010}\right)^9=1^9=1$$

Α2 Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=[(xy^{-1})^2:(x^3y^7)^{-1}]^2$$

για $x=0.4$ και $y=-2.5$

Λύση:

Θα κάνουμε πρώτα τις πράξεις στην παράσταση Α με σκοπό να την απλοποιήσουμε:

$$A=[(xy^{-1})^2:(x^3y^7)^{-1}]^2$$

Εφαρμόζω την ιδιότητα 23 στις εσωτερικές παρενθέσεις αφού αυτές έχουν προτεραιότητα.

$$A=[(x^2y^{-2}):(x^{-3}y^{-7})]^2$$

Μετατρέπω την διαίρεση σε πολλαπλασιασμό ιδιότητα 9:

$$A=\left[(x^2y^{-2})\cdot\frac{1}{(x^{-3}y^{-7})}\right]^2$$

Εφαρμόζω τις ιδιότητες 21 και 22:

$$A=(x^{2+3}y^{-2+7})^2=(x^5\cdot y^5)^2$$

Εφαρμόζω την ιδιότητα 23:

$$A=x^{10}\cdot y^{10}$$

Εφαρμόζω την ιδιότητα 19:

$$A=(x\cdot y)^{10}$$

για $x=0.4$ και $y=-2.5$ έχουμε:

$$A=(0.4\cdot(-2.5))^{10}$$

Κάνω πράξεις με την βοήθεια των ρητών:

$$A=(0.4\cdot(-2.5))^{10}=\left(\frac{4}{10}\cdot\frac{-25}{10}\right)^{10}$$

$$A=\left(\frac{-100}{100}\right)^{10}=(-1)^{10}=1$$

Από το βιβλίο της Γ Γυμνασίου λύνουμε μερικά ακόμα παραδείγματα:

Π1 Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A=\left(-\frac{1}{3}x^3y^5\right):\left(\frac{6}{5}x^2y^2\right)$$

Λύση:

Μετατρέπω την διαίρεση σε πολλαπλασιασμό ιδιότητα 9:

$$A=\left(-\frac{1}{3}x^3y^5\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x^2y^2}\right)$$

Εφαρμόζω τις ιδιότητες 21 και 22:

$$A=-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}x^{3-2}y^{5-2}$$

$$A=-\frac{5}{18}xy^3$$

Π2 Να Απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A=(-2x^2y^3)^3:(-8x^3y^4)$$

Λύση:

Μετατρέπω την διαίρεση σε πολλαπλασιασμό ιδιότητα 9:

$$A=(-2x^2y^3)^3\cdot\frac{1}{-8x^3y^4}$$

Εφαρμόζω την ιδιότητα 23:

$$A=-8x^6y^9\cdot\frac{1}{-8x^3y^4}$$

Εφαρμόζω τις ιδιότητες 21 και 22:

$$A=\frac{-8}{-8}\cdot x^{6-3}y^{9-4}$$

$$A=x^3y^5$$

Π3 Να Απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A=(-2xy^4w^3)^2\cdot(-x^2y)^3$$

Λύση:

Εφαρμόζω την ιδιότητα 23:

$$A=4\cdot x^2\cdot y^8\cdot w^6\cdot(-1)\cdot x^6\cdot y^3$$

Εφαρμόζω τις ιδιότητες 21:

$$A=-4\cdot x^{2+6}\cdot y^{8+3}\cdot w^6=-4x^8y^{11}w^6$$

Παρακάτω παραθέτουμε τις **βασικές ταυτότητες** μαζί με τις αποδείξεις τους:

(1) Τετράγωνο αθροίσματος

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)\cdot(x+y)\\ &= x^2+xy+xy+y^2\\ &= x^2+2xy+y^2 \qquad (24)\end{aligned}$$

(2) Τετράγωνο διαφοράς

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= (x-y)\cdot(x-y)\\ &= x^2-xy-xy+y^2\\ &= x^2-2xy+y^2 \qquad (25)\end{aligned}$$

(3) Διαφορά τετραγώνων

$$\begin{aligned}(x-y)(x+y) &= x^2-xy+xyy^2\\ &= x^2-y^2 \qquad (26)\end{aligned}$$

(4) Κύβος αθροίσματος

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)\cdot(x+y)^2\\ &= (x+y)(x^2+2xy+y^2)\\ &= x^3+2x^2y+xy^2+\\ &\qquad +x^2y+2xy^2+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \qquad (27)\end{aligned}$$

(5) Κύβος αθροίσματος

$$\begin{aligned}(x-y)^3 &= (x-y)\cdot(x-y)^2\\ &= (x-y)(x^2-2xy+y^2)\\ &= x^3-2x^2y+xy^2+\\ &\qquad -x^2y+2xy^2-y^3\\ &= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 \qquad (28)\end{aligned}$$

(6) Άθροισμα κύβων

$$\begin{aligned}&(x+y)(x^2-xy+y^2)=\\ &= x^3-x^2y+xy^2+\\ &\qquad +x^2y-xy^2+y^3\\ &= x^3+y^3 \qquad (29)\end{aligned}$$

(6) Διαφορά κύβων

$$\begin{aligned}&(x-y)(x^2+xy+y^2)=\\ &= x^3+x^2y+xy^2+\\ &\qquad -x^2y-xy^2-y^3\\ &= x^3-y^3 \qquad (30)\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}(x+y+w)^2 &= (x+y+w)(x+y+w)\\ &= x^2+xy+xw+\\ &\qquad +yx+y^2+yw+\\ &\qquad +wx+wy+w^2\\ &= x^2+y^2+w^2+\\ &\qquad +2xy+2xw+2yw \qquad (31)\end{aligned}$$

A3 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(i) 1001^2-999^2

(ii) $99\cdot 101$

(iii) $\dfrac{(7{,}23)^2-(4{,}23)^2}{11{,}46}$

Λύση:

Για την παράσταση **(i)** έχουμε διαδοχικά:

$$1001^2-999^2$$

Εφαρμόζω την διαφορά τετραγώνων 26:

$$(1001-999)(1001+999)$$

και κάνω τις πράξεις:

$$2\cdot 2000=4000$$

Για την παράσταση **(ii)** έχουμε διαδοχικά:

$$99\cdot 101$$

Γράφω το $99=100-1$ και το $101=100+1$ με σκοπό να εμφανιστεί η διαφορά τετραγώνων 26:

$$(100\text{-}1)(100\text{+}1)$$

Εφαρμόζω την ταυτότητα:

$$100^2-1^2$$

και κάνω τις πράξεις:

$$10000-1=9.999$$

Για την παράσταση **(iii)** έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{(7{,}23)^2-(4{,}23)^2}{11{,}46}$$

Εφαρμόζω την διαφορά τετραγώνων 26 στον αριθμητή:

$$\frac{(7{,}23-4{,}23)(7{,}23+4{,}23)}{11{,}46}$$

και κάνω τις πράξεις:

$$\frac{3\cdot 11{,}26}{11{,}26}=3$$

Ένας **μαθηματικός ισχυρισμός** ή μαθηματική πρόταση μπορεί να είναι **αληθής** ή **ψευδής** και δεν επιδέχεται καμία άλλη κατάσταση.

Για να αποδείξουμε ότι μια μαθηματική πρόταση είναι αληθής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την **ευθεία απόδειξη** που μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους:

(1) Να αρχίσουμε από το πρώτο μέλος της πρότασης και με διαδοχικές αληθείς πράξεις να φτάσουμε στο δεύτερο **ή** να αρχίσουμε από το δεύτερο και να φτάσουμε στο πρώτο **ή** να αρχίσουμε και από τα δύο μέλη και να φτάσουμε σε ένα κοινό αποτέλεσμα (32)

(2) Να γράψουμε όλη την ισότητα και με διαδοχικές ισοδυναμίες (⇔) να φτάσουμε σε μία ισότητα που να είναι αληθής. Με αυτό τον τρόπο θα είναι αληθείς όλες οι ισότητες που έχουμε γράψει επομένως θα είναι αληθής και η αρχική. (33)

(3) Για να δείξουμε ότι μία μαθηματική πρόταση δεν ισχύει (είναι ψευδής) αρκεί να βρούμε ένα τουλάχιστον παράδειγμα για το οποίο αυτή η πρόταση δεν ισχύει. **Αντιπαράδειγμα** (34)

Με την μέθοδο της ευθείας απόδειξης (βλέπε 32) έχουν γίνει και οι αποδείξεις των ταυτοτήτων 24 έως και 31

A4 (i) Να δείξετε ότι $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$

(ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2-\left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2$$

Λύση:

Για να αποδείξουμε την πρώτη πρόταση θα χρησιμοποιήσουμε την ευθεία απόδειξη και μάλιστα την πρώτη μέθοδο (βλέπε 32)

$$\begin{aligned}(x+y)^2-(x-y)^2 &= (x^2+y^2+2xy)-\\ &\quad -(x^2+y^2-2xy)\\ &= x^2+y^2+2xy-\\ &\quad -x^2-y^2+2xy\\ &= 4xy\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε μία νέα ταυτότητα:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να κάνουμε τον υπολογισμό του δεύτερου ερωτήματος:

$$\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2-\left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2$$

παρατηρείστε ότι $x=\frac{999}{1000}$ και $y=\frac{1000}{999}$, επομένως έχουμε ότι η παραπάνω σχέση είναι ίση με:

$$4\cdot\frac{999}{1000}\cdot\frac{1000}{999}=4$$

A5 (i) Να αποδείξετε ότι: $x^2-(x-1)(x+1)=1$

(ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(1{,}3265)^2-0{,}3265\cdot 2{,}3265$$

Λύση:

Για να αποδείξουμε την πρώτη πρόταση θα χρησιμοποιήσουμε την ευθεία απόδειξη και μάλιστα την πρώτη μέθοδο (βλέπε 32), όπου ξεκινάμε από το πρώτο μέλος με σκοπό να φτάσουμε στο δεύτερο:

$$x^2-(x-1)(x+1)$$

Εφαρμόζω την διαφορά τετραγώνων 26:

$$x^2-(x^2-1)$$

και κάνω τις πράξεις:

$$x^2-x^2+1=1$$

Επομένως η πρόταση είναι αληθής και θα την χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε την παράσταση του δεύτερου ερωτήματος.

Παρατηρείστε ότι $0{,}3265=1{,}3265-1$ και ότι $2{,}3265=1{,}3265+1$

Επομένως γράφουμε:

$$\begin{aligned}&(1{,}3265)^2-0{,}3265\cdot 2{,}3265=\\ &\quad =(1{,}3265)^2-(1{,}3265-1)\cdot(1{,}3265+1)\end{aligned}$$

παρατηρείστε ότι $x=1{,}3265$ επομένως έχουμε:

$$(1{,}3265)^2-(1{,}3265-1)\cdot(1{,}3265+1)=1$$

A6 Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών (του μικρότερου από τον μεγαλύτερο) ισούται με το άθροισμά τους.

Λύση:

Έστω ότι δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμού είναι οι x και $x+1$. Προφανώς ο $x+1$ είναι μεγαλύτερος από τον x.

Την μαθηματική πρόταση που είναι διατυπωμένη σε μορφή κειμένου στην εκφώνηση την αναδιατυπώνουμε με την χρήση συμβόλων:

$$(x+1)^2-x^2=(x+1)+x$$

Ας κάνουμε τώρα κάποιες σωστές πράξεις που είδη γνωρίζουμε πως γίνονται:

Αρχικά κάνω την ταυτότητα "τετράγωνο αθροίσματος" 24 στο πρώτο μέλος:

$$x^2+2x+1-x^2=(x+1)+x$$

Τα x^2 και $-x^2$ είναι αντίθετα επομένως έχουν άθροισμα μηδέν και φεύγουν:

$$2x+1=(x+1)+x$$

κάνω και τις πράξεις στο δεύτερο μέλος και έχουμε:

$$2x+1=2x+1$$

Όλα τα παραπάνω βήματα θα μπορούσαμε να τα έχουμε γράψει με την χρήση του "συνεπάγεται" (⇒) ως εξής:

$$(x+1)^2-x^2=(x+1)+x\Rightarrow$$

$$x^2+2x+1-x^2=(x+1)+x\Rightarrow$$

$$2x+1=(x+1)+x\Rightarrow$$

$$2x+1=2x+1$$

Τώρα θα πρέπει να σκεφτούμε αν μπορούμε να κάνουμε όλα αυτά τα βήματα με έναν "αντίρροπο" τρόπο, δηλαδή να ξεκινήσουμε από:

$$2x+1=2x+1$$

στο δεύτερο μέλος να διασπάσουμε το $2x$ σε $x+x$ και να κάνουμε χρήση της παρένθεσης:

$$2x+1=(x+1)+x$$

στο πρώτο μέλος να προσθέσουμε και να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό x^2:

$$x^2+2x+1-x^2=(x+1)+x$$

να κάνουμε χρήση της ταυτότητας (παραγοντοποίηση):

$$(x+1)^2-x^2=(x+1)+x$$

και έτσι επιστρέψαμε από εκεί που αρχίσαμε.

Τώρα γεννιέται το ερώτημα εάν όλες οι πράξεις μπορούν να γίνουν με κάποιον αντίρροπο τρόπο όπως το παράδειγμα που δείξαμε. Φυσικά και όχι , δεν θα είμαστε πάντα τόσο τυχεροί. Σχετικά με πράξεις που δεν γίνονται με τον "αντίρροπο" τρόπο θα δούμε αναλυτικά προσεχώς.

Η δεύτερη ομάδα "αντίρροπων" πράξεων μπορούν να γραφούν συνοπτικά ως εξής:

$$2x+1=2x+1 \Rightarrow$$

$$2x+1=(x+1)+x \Rightarrow$$

$$x^2+2x+1-x^2=(x+1)+x \Rightarrow$$

$$(x+1)^2-x^2=(x+1)+x$$

Τέλος για να δηλώσουμε ότι οι πράξεις γίνονται και προς τις δύο κατευθύνσεις, θα μπορούσαμε απλά να γράψουμε:

$$(x+1)^2-x^2=(x+1)+x \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x+1-x^2=(x+1)+x \Leftrightarrow$$

$$2x+1=(x+1)+x \Leftrightarrow$$

$$2x+1=2x+1 \qquad (35)$$

προσέξτε την χρήση του διπλού βέλους (ισοδύναμο).

Τώρα πρέπει να σκεφτούμε ότι κάθε γραμμή από την παραπάνω έκφραση αποτελεί και μία μαθηματική πρόταση που μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής.

Αρχικά στην πρώτη γραμμή η πρόταση που αναγράφεται δεν γνωρίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής, θα μπορούσε να είναι ένα από τα δύο, απλά εμείς ακόμα δεν το γνωρίζουμε.

Το ίδιο συμβαίνει και στην δεύτερη γραμμή. Πάντως ότι είναι η πρόταση στην πρώτη γραμμή (δηλαδή αληθής ή ψευδής) θα είναι και στην δεύτερη αφού η δεύτερη γραμμή προέκυψε με σωστές πράξεις από την πρώτη. Αλλά επίσης μπορούμε να πούμε ότι, ότι είναι η πρόταση στην δεύτερη γραμμή θα είναι και στην πρώτη αφού και από την δεύτερη γραμμή μπορούμε να κάνουμε σωστές πράξεις και να καταλήξουμε στην πρώτη.

Το ίδιο ισχύει και για την τρίτη και τέταρτη γραμμή.

Όμως αυτό που είναι γραμμένο στην τέταρτη γραμμή είναι σίγουρα αληθές, αφού και στα δύο μέλη της ισότητας γράφει το ίδιο πράγμα.

Επομένως θα είναι αληθής και η πρόταση στην τρίτη γραμμή αφού μπορεί να προκύψει με σωστές πράξεις από την τέταρτη.

Με την σειρά θα είναι όλες οι προτάσεις σε όλες τις γραμμές αληθείς.

Δηλαδή θα είναι και η πρώτη που θέλουμε να αποδείξουμε.

Η μέθοδος είναι πολύ ενδιαφέρουσα, θα την χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές και φυσικά δεν χρειάζεται να γράφουμε κάθε φορά όλα αυτά που εγώ αναλυτικά σας έγραψα με σκοπό να σας δώσω να καταλάβετε την έννοια αυτού του τρόπου απόδειξης.

Θα μπορούσαμε απλά να έχουμε γράψει τον ισχυρισμό 35.

A7 Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $2^\nu+2^{\nu+1}+2^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Λύση:

Στην παράσταση

$$2^\nu+2^{\nu+1}+2^{\nu+2}$$

Εφαρμόζω την ιδιότητα 19:

$$2^\nu+2^\nu\cdot 2^1+2^\nu\cdot 2^2$$

βγάζω κοινό παράγοντα το 2^ν :

$$2^\nu\cdot(1+2+4)=7\cdot 2^\nu$$

Δηλαδή πολλαπλάσιο του 7.

Θα θυμηθούμε τώρα τους τρόπους που μπορούμε να κάνουμε **παραγοντοποίηση** από το βιβλίο της Γ Γυμνασίου.

Λάβετε υπόψιν σας ότι η παραγοντοποίηση χρησιμοποιείται κυρίως με σκοπό την **απλοποίηση**.

Γενικά όταν έχουμε σκοπό να απλοποιήσουμε μία ρητή παράσταση (κλάσμα) παραγοντοποιούμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή και μετά προβαίνουμε σε απλοποίηση.

(α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα 14, π.χ.

$$12x^2y-30xy^2+6x^2y^2=6xy(2x-5y+xy)$$

$$\alpha(\omega-x)+3\beta(x-\omega)=(\omega-x)(\alpha-3\beta)$$

$$3(2x-1)+x(4x-2)=(2x-1)(3+2x)$$

(β) Κοινός παράγοντας κατά ομάδες

Εδώ εφαρμόζουμε τον κοινό παράγοντα ανά δύο ή τρεις όρους και συνεχίζουμε σε δύο στάδια μέχρι να πραγματοποιηθεί η παράσταση, π.χ.

$$3x^3-12x^2+5x-20=3x^2(x-4)+5(x-4)= \\ =(x-4)(3x^2+5)$$

$$3x^2+5xy+2y^2=3x^2+3xy+2xy+2y^2= \\ =3x(x+y)+2y(x+y)=(x+y)(3x+2y)$$

(γ) Διαφορά τετραγώνων

Εδώ εφαρμόζουμε την ταυτότητα 26, π.χ.

$$4x^2-25=(2x-5)(2x+5)$$

$$(3x-1)^2-81=(3x-1-9)(3x-1+9)= \\ =(3x-10)(3x+8)$$

(δ) Διαφορά - άθροισμα κύβων

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες 29, 30, π.χ.

$$(x^3-27)=(x-3)(x^2+3x+9)$$

$$(x^3+64)=(x+4)(x^2-4x+16)$$

(ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες 24,25, π.χ.

$$4x^2+12x+9=(2x+3)^2$$

$$-4y^2+4y-1=-(2y-1)^2$$

(στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Εδώ παραγοντοποιούμε με την βοήθεια του τύπου:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2),\alpha\neq 0$$

όπου ρ_1 και ρ_2 είναι οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\alpha\neq 0$$

που βρίσκουμε από τον τύπο

$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα

Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική δεν παραγοντοποιείται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Περισσότερες λεπτομέρειες θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Δίνουμε ένα παράδειγμα:

$$x^2-8x+12=1(x-2)(x-6)$$

διότι το τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$$\Delta=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 12=16>0$$

και ρίζες

$$\rho_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2}$$

$$\rho_1=2 \text{ ή } \rho_2=6$$

A8 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

(i) $\dfrac{a^3-2a^2+a}{a^2-a}$

(ii) $\dfrac{(a^2-a)+2a-2}{a^2-1}$

Λύση:

Για την πρώτη περίπτωση η οποία ορίζεται για $\alpha\neq 0$ και $\alpha\neq 1$

$$\frac{a^3-2a^2+a}{a^2-a}$$

αρχίζουμε με την παραγοντοποίηση του αριθμητή και του παρανομαστή με κοινό παράγοντα:

$$\frac{a(a^2-2a+1)}{a(a-1)}$$

Στον αριθμητή παραγοντοποιούμε με ανάπτυγμα τετραγώνου και τέλος απλοποιούμε:

$$\frac{a(a-1)^2}{a(a-1)}=a-1$$

Για την πρώτη περίπτωση η οποία ορίζεται για $\alpha\neq\pm 1$

$$\frac{(a^2-a)+2a-2}{a^2-1}$$

παραγοντοποιούμε κατά ομάδες στον αριθμητή σε δύο στάδια:

$$\frac{a(a-1)+2(a-1)}{a^2-1} \text{ ή}$$

$$\frac{(a-1)(a+2)}{a^2-1}$$

παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή με την διαφορά τετραγώνων και τέλος απλοποιούμε:

$$\frac{(a-1)(a+2)}{(a-1)(a+1)}=\frac{a+2}{a+1}$$

A9 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

(i) $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2\cdot\dfrac{a^3+a^2}{(a+1)^3}$

(ii) $\dfrac{a^2+a+1}{a+1}\cdot\dfrac{a^2-1}{a^3-1}$

Λύση:

Για να απλοποιήσετε την πρώτη περίπτωση η οποία ορίζεται για $\alpha\neq 0$ και $a\neq -1$

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{a^3+a^2}{(a+1)^3}$$

αρχίζουμε με τις πράξεις μέσα στην πρώτη παρένθεση:

$$\left(\frac{a^2-1}{a}\right)^2\cdot\frac{a^3+a^2}{(a+1)^3}$$

Εφαρμόζουμε την διαφορά τετραγώνου στον αριθμητή του πρώτου κλάσματος και βγάζουμε κοινό παράγοντα στον αριθμητή του δεύτερου κλάσματος:

$$\left(\frac{(a-1)(a+1)}{a}\right)^2\cdot\frac{a^2(a+1)}{(a+1)^3}$$

εφαρμόζουμε την ιδιότητα 20 των δυνάμεων στο πρώτο κλάσμα:

$$\frac{(a-1)^2(a+1)^2}{a^2}\cdot\frac{a^2(a+1)}{(a+1)^3}$$

και απλοποιούμε:

$$(a-1)^2$$

Για να απλοποιήσουμε την δεύτερη περίπτωση η οποία ορίζεται για $a\neq\pm 1$

$$\frac{a^2+a+1}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a^3-1}$$

αρχίζουμε με την διαφορά τετραγώνων του αριθμητή του δεύτερου κλάσματος και με την διαφορά κύβων του παρανομαστή του ίδιου κλάσματος. Μετά απλοποιούμε:

$$\frac{a^2+a+1}{a+1}\cdot\frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}=1$$

Α10 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(i) $(x+y)^2 \cdot (x^{-1}+y^{-1})^{-2}$

(ii) $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$

Λύση:

Στην πρώτη περίπτωση:

$$(x+y)^2 \cdot (x^{-1}+y^{-1})^{-2}$$

αρχίζουμε εφαρμόζοντας τον ορισμό των δυνάμεων 18:

$$(x+y)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-2}$$

εκτελούμε τις πράξεις μέσα στην δεύτερη παρένθεση:

$$(x+y)^2 \cdot \left(\frac{x+y}{x\,y}\right)^{-2}$$

μετά τις ιδιότητες 18 και 19 στην δεύτερη παρένθεση:

$$\frac{(x+y)^2 \cdot (x\,y)^2}{(x+y)^2}$$

εφαρμόζω πάλι την ιδιότητα 19 και απλοποιώ:

$$\frac{(x+y)^2 \cdot (x\,y)^2}{(x+y)^2} = (x\,y)^2 = x^2\,y^2$$

Στην δεύτερη περίπτωση:

$$\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$$

αρχίζουμε εφαρμόζοντας τον ορισμό των δυνάμεων 18:

$$\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$$

κάνω ομώνυμα τα κλάσματα που είναι στον αριθμητή και τον παρανομαστή του δεύτερου κλάσματος και μετά προσθέτω:

$$\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{\frac{y-x}{x\,y}}{\frac{y^2-x^2}{x^2\,y^2}}$$

κάνω το σύνθετο κλάσμα απλό:

$$\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{(y-x)x^2\,y^2}{(y^2-x^2)\,x\,y}$$

εφαρμόζω την διαφορά τετραγώνων στον παρανομαστή και απλοποιώ:

$$\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{(y-x)x^2\,y^2}{(y-x)(y+x)\,x\,y} = \frac{x\,y}{(x-y)}$$

Α11 Να δείξετε ότι $\left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right) : \left(\frac{x^2}{x-y}-y\right) = 1$

Λύση:

Θα ακολουθήσουμε την μέθοδο της ευθείας απόδειξης και μάλιστα θα αρχίσουμε τις πράξεις από το πρώτο μέλος με σκοπό να βρούμε το δεύτερο (βλέπε 32):

$$\left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right) : \left(\frac{x^2}{x-y}-y\right)$$

Αρχίζουμε με τις πράξεις μέσα στην δεύτερη παρένθεση. Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και προσθέτουμε:

$$\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} : \frac{x^2-y(x-y)}{x-y}$$

συνεχίζουμε με τις πράξεις στον αριθμητή του δεύτερου κλάσματος, κάνουμε το άθροισμα κύβων και την διαφορά τετραγώνων στον αριθμητή και τον παρανομαστή του πρώτου κλάσματος:

$$\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} : \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$$

μετατρέπω την διαίρεση σε πολλαπλασιασμό και απλοποιώ:

$$\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{x^2-xy+y^2} = 1$$

Ισότητα είναι μία μαθηματική πρόταση που αποτελείται από δύο μέλη (το πρώτο και το δεύτερο μέλος) που είναι ίσα μεταξύ τους. Γράφουμε:

$$\alpha = \beta \qquad (36)$$

Όταν δύο αριθμοί δεν είναι ίσοι γράφουμε:

$$\alpha \neq \beta \qquad (37)$$

Οι ισότητες επιδέχονται τέσσερις πράξεις:

(α) Αν έχουμε μία ισότητα $\alpha=\beta$, τότε μπορούμε και στα δύο μέλη να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό γ και αντιστρόφως. Γράφουμε:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma \qquad (38)$$

(β) Αν έχουμε μία ισότητα $\alpha=\beta$ και έναν μη μηδενικό αριθμό $\gamma \neq 0$, τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε αυτόν τον αριθμό και στα δύο μέλη.

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma \qquad (39)$$

Με την βοήθεια αυτών των δύο ιδιοτήτων λύνονται οι εξισώσεις πρώτου βαθμού, π.χ

$2\cdot x+5=-10 \Leftrightarrow$ προσθέτουμε το (-5)

$$2\cdot x+5+(-5)=-10+(-5) \Leftrightarrow$$

$2\cdot x=-15 \Leftrightarrow$ πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x=\frac{1}{2}\cdot(-15) \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-15}{2}$$

(γ) Αν έχουμε δύο ισότητες $\alpha=\beta$ και $\gamma=\delta$, τότε μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη, δηλαδή:

$$(\alpha=\beta \;\kappa\alpha\iota\; \gamma=\delta) \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta \qquad (40)$$

(δ) Αν έχουμε δύο ισότητες $\alpha=\beta$ και $\gamma=\delta$, τότε μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη:

$$(\alpha=\beta \;\text{και}\; \gamma=\delta)\Rightarrow \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\delta \qquad (41)$$

Άλλες δύο σημαντικές ιδιότητες των ισοτήτων είναι:

(ε) Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι μηδέν αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους δύο αριθμούς είναι ίσος με μηδέν, δηλαδή:

$$\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \;\text{ή}\; \beta=0 \qquad (42)$$

(στ) Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι διάφορο του μηδενός τότε υποχρεωτικά και οι δύο αριθμοί πρέπει να είναι ταυτόχρονα διάφοροι του μηδενός.

$$\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0 \;\text{και}\; \beta\neq 0 \qquad (43)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα από το σχολικό βιβλίο:

Π4 Να αποδειχθούν οι εξής ιδιότητες των αναλογιών:

(i) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma,\ \beta\delta\neq 0$ (44)

(ii) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta},\ \beta\gamma\delta\neq 0$ (45)

(iii) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta},\ \beta\delta\neq 0$ (46)

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta},\ \beta\delta(\beta+\delta)\neq 0$ (47)

Λύση:

Για να αποδείξουμε την πρώτη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε την ευθεία απόδειξη και μάλιστα τον δεύτερο τρόπο. Βλέπε 33.

Δηλαδή θα πάρουμε την πρώτη ισότητα:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

και θα πολλαπλασιάσουμε και στις δύο πλευρές την ποσότητα $\beta\delta$, σύμφωνα με την ιδιότητα 39. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι να είναι $\beta\delta\neq 0$ που πράγματι μας το δίνει στην υπόθεση:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\delta=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\beta\delta$$

και έτσι θα πάρουμε την ισότητα:

$$\alpha\delta=\gamma\beta$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\frac{1}{\beta\delta}\neq 0$ μπορούμε να κάνουμε και τις πράξεις "ανάποδα", δηλαδή ξεκινώντας από την ισότητα:

$$\alpha\delta=\gamma\beta\Rightarrow$$

$$\alpha\delta\cdot\frac{1}{\beta\delta}=\gamma\beta\cdot\frac{1}{\beta\delta}\Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

Φυσικά θα μπορούσαμε πολύ απλά να γράψουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\delta=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\beta\delta\Leftrightarrow$$

$$\alpha\delta=\gamma\beta$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι παρόμοια. Εδώ θα πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της πρώτης ισότητας με $\frac{\beta}{\gamma}\neq 0$. Οι παρακάτω πράξεις μπορούν να εκτελεστούν και "αντίστροφα" επομένως γράφουμε το σύμβολο της ισοδυναμίας:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$$

Σχετικά με την τρίτη περίπτωση πάλι θα ασχοληθούμε με την ευθεία απόδειξη όπως και στις άλλες δύο περιπτώσεις. Σε αυτή την περίπτωση θα εφαρμόσουμε την ιδιότητα 38, όπου θα προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της ισότητας. Θα προσθέσουμε τον αριθμό 1:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}+\frac{\delta}{\delta}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}=\frac{\beta+\delta}{\delta}$$

Σχετικά με την τελευταία περίπτωση θέτουμε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\lambda$$

δηλαδή τώρα έχουμε δύο ισότητες:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\lambda \;\text{ και }\; \frac{\gamma}{\delta}=\lambda$$

οι οποίες γράφονται και ως:

$$\alpha=\lambda\beta \;\text{ και }\; \gamma=\lambda\delta$$

τις οποίες προσθέτουμε κατά μέλη σύμφωνα με την ιδιότητα 40:

$$\alpha+\gamma=\lambda\beta+\lambda\delta=\lambda(\beta+\delta)$$

δηλαδή:

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=\lambda$$

δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Τις τέσσερις αυτές σχέσεις 44 έως 47 μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε και ως θεωρία χωρίς απόδειξη.

Α12 Έστω α, β και γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}$

ii) Αν $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\gamma-\alpha$

Λύση:

Μπορούμε να αποδείξουμε την πρώτη περίπτωση με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

(1ος τρόπος)

Έστω:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\lambda$$

δηλαδή έχουμε τις τρεις παρακάτω ισότητες:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\lambda \text{ και } \frac{\beta}{\gamma}=\lambda \text{ και } \frac{\gamma}{\alpha}=\lambda$$

που μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\alpha=\lambda\beta \text{ και } \beta=\lambda\gamma \text{ και } \gamma=\lambda\alpha$$

προσθέτουμε κατά μέλη αυτές τις τρεις σχέσεις:

$$\alpha+\beta+\gamma=\lambda\beta+\lambda\gamma+\lambda\alpha=\lambda(\beta+\gamma+\alpha)$$

Το $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ αφού τα α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου και είναι όλοι τους θετικοί αριθμοί. Όταν προσθέτουμε θετικούς αριθμούς το αποτέλεσμα είναι θετικό.

Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης με $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}=\lambda(\beta+\gamma+\alpha)\cdot\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

δηλαδή 1=λ

Αν τώρα πάρουμε την πρώτη σχέση έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\lambda=1$$

δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\beta}=1 \text{ και } \frac{\beta}{\gamma}=1 \text{ και } \frac{\gamma}{\alpha}=1$$

που αυτό σημαίνει:

$$\alpha=\beta \text{ και } \beta=\gamma \text{ και } \gamma=\alpha$$

ή

$$\alpha=\beta=\gamma$$

δηλαδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(2ος τρόπος)

Προσαρμόζοντας την σχέση 47 στο πρόβλημά μας έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma+\alpha}=1$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\neq 0$$

που πράγματι ισχύει αφού οι πλευρές α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου.

Δηλαδή, δείξαμε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=1$$

που όπως και στον πρώτο τρόπο είναι:

$$\alpha=\beta=\gamma$$

(3ος τρόπος)

Έστω:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\lambda$$

δηλαδή έχουμε τις τρεις παρακάτω ισότητες:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\lambda \text{ και } \frac{\beta}{\gamma}=\lambda \text{ και } \frac{\gamma}{\alpha}=\lambda$$

που μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\alpha=\lambda\beta \text{ και } \beta=\lambda\gamma \text{ και } \gamma=\lambda\alpha$$

πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη αυτές τις τρεις σχέσεις:

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=\lambda^3\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$$

Αφού τα α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου έχουμε ότι $\alpha\beta\gamma\neq 0$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας με $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$:

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\frac{1}{\alpha\gamma\beta}=\lambda^3\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\frac{1}{\alpha\gamma\beta}$$

δηλαδή:

$$\lambda^3=1 \text{ ή } \lambda=1$$

Αν τώρα πάρουμε την πρώτη σχέση έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\lambda=1$$

δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\beta}=1 \text{ και } \frac{\beta}{\gamma}=1 \text{ και } \frac{\gamma}{\alpha}=1$$

που αυτό σημαίνει:

$$\alpha=\beta \text{ και } \beta=\gamma \text{ και } \gamma=\alpha$$

ή

$$\alpha=\beta=\gamma$$

δηλαδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Σχετικά με την δεύτερη περίπτωση μπορούμε πάλι να εργαστούμε με δύο τρόπους:

(1ος τρόπος)

Έστω

$$\alpha-\beta=\beta-\gamma=\gamma-\alpha=\lambda$$

Έχουμε δηλαδή τις τρεις παρακάτω ισότητες:

$$\alpha-\beta=\lambda \text{ και } \beta-\gamma=\lambda \text{ και } \gamma-\alpha=\lambda$$

προσθέτουμε κατά μέλη αυτές τις ισότητες:

$$\alpha-\beta+\beta-\gamma+\gamma-\alpha=\lambda+\lambda+\lambda$$

δηλαδή:

$$0=3\lambda \text{ ή } \lambda=0$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\alpha-\beta=0 \text{ και } \beta-\gamma=0 \text{ και } \gamma-\alpha=0$$

δηλαδή

$$\alpha=\beta \text{ και } \beta=\gamma \text{ και } \gamma=\alpha \text{ ή } \alpha=\beta=\gamma$$

επομένως το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(2ος τρόπος)

Από τις σχέσεις:

$$\alpha-\beta=\beta-\gamma=\gamma-\alpha$$

μπορούμε να σχηματίσουμε τις παρακάτω δύο ισότητες:

$$\alpha-\beta=\beta-\gamma \text{ και } \alpha-\beta=\gamma-\alpha$$

τις οποίες προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\alpha-\beta+\alpha-\beta=\beta-\gamma+\gamma-\alpha \text{ ή } 2\alpha-2\beta=\beta-\alpha$$

η οποία γράφεται:

$$3\alpha=3\beta \text{ ή } \alpha=\beta$$

παίρνουμε τώρα την σχέση $\alpha-\beta=\beta-\gamma$ και αντικαταστούμε ότι $\alpha=\beta$ και βρίσκουμε:

$$\beta=\gamma$$

δηλαδή βρήκαμε συνολικά ότι:

$$\alpha=\beta=\gamma$$

που αυτό σημαίνει ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

A13 Να δείξετε ότι, αν ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $L=4\alpha$ και εμβαδόν $E=\alpha^2$, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με α.

Λύση:

Έστω ότι οι πλευρές αυτού του ορθογωνίου είναι x και y. Τότε η περίμετρος γράφεται ως:

$$L=x+y+x+y=2x+2y$$

και το εμβαδόν του είναι:

$$E=xy$$

Από τα δεδομένα τις άσκησης έχουμε ότι:

$$4\alpha=2x+2y \text{ και } \alpha^2=xy$$

οι οποίες γράφονται:

$$y=2\alpha-x \text{ και } \alpha^2=xy$$

Αντικαταστούμε την πρώτη σχέση στην δεύτερη και έχουμε:

$$\alpha^2=x(2a-x) \Leftrightarrow x^2-2ax+a^2=0 \Leftrightarrow (x-a)^2=0 \Leftrightarrow x-a=0 \Leftrightarrow x=a$$

παίρνουμε τώρα την εξίσωση $y=2\alpha-x$ και αντικαταστούμε την $x=a$:

$$y=2\alpha-x \Leftrightarrow y=2\alpha-a \Leftrightarrow y=a$$

Δηλαδή το ορθογώνιο έχει ίσες πλευρές, επομένως είναι τετράγωνο με πλευρά α.

Παρακάτω θα αναλύσουμε έναν άλλο τρόπο απόδειξης που ονομάζεται **Μέθοδος Απαγωγής σε Άτοπο.** Αρχικά διαβάστε προσεκτικά τον τίτλο.

Όπως έχουμε είδη αναφέρει κάθε μαθηματική πρόταση μπορεί να βρεθεί σε μία εκ των δυο καταστάσεων, δηλαδή να είναι αληθής ή ψευδής. Δεν μπορεί να είναι κάτι άλλο.

Επίσης υπάρχουν μαθηματικές προτάσεις που μπορούν να βρεθούν σε ένα φάσμα δύο μόνο καταστάσεων, δηλαδή π.χ. να πούμε

«ο αριθμός x είναι ρητός»

«ο αριθμός x είναι άρρητος»

Δηλαδή στο παραπάνω παράδειγμα ο αριθμός x θα είναι είτε ρητός είτε άρρητος. Δεν μπορεί να είναι κάτι άλλο.

Για κοιτάξτε όμως και το επόμενο παράδειγμα, όπου ο αριθμός x μπορεί να βρεθεί σε τρεις διαφορετικές καταστάσεις:

«ο αριθμός x είναι θετικός»

«ο αριθμός x είναι αρνητικός»

«ο αριθμός x είναι μηδέν»

Βεβαίως το παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να το διασκευάσουμε ως εξής:

«ο αριθμός x είναι θετικός»

«ο αριθμός x δεν είναι θετικός»

ώστε πάλι ο αριθμός x να μπορεί να βρεθεί σε μία εκ των δύο καταστάσεων και όχι σε πολλές.

Για μαθηματικές προτάσεις αυτού του είδους μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Ας δούμε τώρα πως εφαρμόζεται η μέθοδος με την βοήθεια ενός παραδείγματος μέσα από το σχολικό βιβλίο.

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

«Αν ο x^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο x είναι άρτιος αριθμός» *(48)*

Αυτή η πρόταση αποτελείται από δύο τμήματα:

(1) Αν ο x^2 είναι άρτιος

(2) τότε ο x είναι άρτιος.

Το πρώτο τμήμα είναι η υπόθεση, δηλαδή κάτι που η εκφώνηση μας δίνει ως αληθές. Δεν χρειάζεται να το αποδείξουμε. Θα το χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε το δεύτερο τμήμα.

Το δεύτερο τμήμα είναι αυτό που πρέπει να αποδείξουμε.

Το επόμενο που πρέπει να σκεφτούμε είναι ότι ο αριθμός x είτε θα είναι άρτιος είτε περιττός (όχι άρτιος). Δεν μπορεί να είναι κάτι άλλο.

Εμείς θέλουμε να δείξουμε ότι η πρόταση

«ο x είναι άρτιος»

είναι αληθής.

Αλλά για σκεφτείτε ότι αν αποδεικνύαμε ότι η παρακάτω πρόταση είναι ψευδής:

«ο x είναι περιττός»

τότε δεν θα μπορούσε ο x να είναι τίποτα άλλο από το να είναι άρτιος, διότι είπαμε ότι ο x είτε θα είναι περιττός είτε άρτιος και δεν υπάρχει άλλη επιλογή.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι αυτή η αντίθετη πρόταση είναι αληθής:

<u>Έστω λοιπόν ότι ο x είναι περιττός</u>, επομένως γράφουμε:

$$x=2\kappa+1, \kappa\in\mathbb{Z} \quad \text{επομένως}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= (2\kappa+1)^2 \\ &= 4\kappa^2+4\kappa+1 \\ &= 2(2k^2+2k)+1 \\ &= 2\lambda+1, \lambda\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Δηλαδή ο x^2 είναι περιττός, αλλά αυτό είναι άτοπο αφού στην υπόθεση έχουμε ότι ο x^2 είναι άρτιος δηλαδή $x^2=2\lambda, \lambda\in\mathbb{Z}$

παραπάνω θέσαμε ότι $\lambda=2\kappa^2+2\kappa$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

Επομένως και ο αρχικός ισχυρισμός ότι ο <u>x είναι περιττός</u> θα είναι ψευδής.

Επομένως ο x δεν μπορεί να είναι τίποτα άλλο από το να είναι άρτιος!

Η μέθοδος είναι λίγο απαιτητική, αλλά σε γενικές γραμμές θα πρέπει να προσέχετε ότι

(1) ο ισχυρισμός μπορεί να βρεθεί σε δύο καταστάσεις, αληθής ή ψευδής

(2) Θα κάνετε την αντίθετη υπόθεση από αυτή που θέλετε να δείξετε ως αληθής

(3) Θα προχωράτε με τον συλλογισμός σας μέχρι να δείξετε ότι η πρόταση που υποθέσατε είναι άτοπη (ψευδής). Σε αυτό το στάδιο μπορεί να χρησιμοποιήσετε και την υπόθεση αν υπάρχει.

(4) Θα προχωράτε στο συμπέρασμα ότι είναι αληθής η αρνητική πρόταση από αυτή που υποθέσατε, δηλαδή αυτή που αρχικά θέλετε να δείξετε.

Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα από το σχολικό βιβλίο:

Π5 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Λύση:

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

«ο $\sqrt{2}$ να είναι ρητός» ή

«ο $\sqrt{2}$ να είναι άρρητος».

Δεν υπάρχει καμία άλλη περίπτωση, διότι ένας αριθμός θα είναι είτε ρητός είτε άρρητος.

Η άσκηση λέγοντας ότι πρέπει να αποδείξουμε ότι ο αριθμός είναι άρρητος εννοεί ότι αυτή είναι η αληθής πρόταση απλά εμείς πρέπει και να το αποδείξουμε.

Όπως έχουμε πει, εμείς θα υποθέτουμε την ψευδής πρόταση ως αληθής, δηλαδή ότι:

<u>Έστω ο $\sqrt{2}$ να είναι ρητός</u>

και θα πρέπει μετά από κάποιες πράξεις που θα κάνουμε να οδηγηθούμε σε άτοπο.

Αφού λοιπόν υποθέσαμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός μπορούμε να τον γράψουμε στην μορφή:

$$\sqrt{2}=\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \lambda\in\mathbb{N}$$

και επίσης ότι το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ <u>είναι ανάγωγο</u>, δηλαδή οι αριθμοί κ και λ είναι οι μικρότεροι δυνατοί αφού έχουν γίνει όλες οι απλοποιήσεις.

Τώρα μπορούμε να εκτελέσουμε τις παρακάτω πράξεις:

$$\sqrt{2}=\frac{\kappa}{\lambda}$$

$$(\sqrt{2})^2=\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2$$

$$2=\frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

$$2=\frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

$$\kappa^2=2\lambda^2$$

που αυτό σημαίνει ότι ο κ^2 είναι άρτιος.

Ένας αριθμός είναι άρτιος όταν μπορεί να γραφεί στην μορφή $x=2\cdot\nu$, ενώ είναι περιττός όταν μπορεί να γραφεί στην μορφή $x=2\nu+1$, $\nu\in\mathbb{Z}$

Όμως έχουμε αποδείξει στην 48 ότι αν ο αριθμός κ^2 είναι άρτιος τότε άρτιος θα είναι και ο κ δηλαδή μπορεί να γραφεί στην μορφή $\kappa=2\mu$. Επομένως συνεχίζουμε τώρα με τις πράξεις που αφήσαμε λίγο πριν:

$$\kappa^2=2\lambda^2$$

$$(2\mu)^2=2\lambda^2$$

$$4\mu^2=2\lambda^2$$

$$\lambda^2=2\mu^2$$

που σημαίνει ότι ο λ^2 είναι άρτιος άρα και ο λ θα είναι άρτιος.

Αρχικά είχαμε πει ότι το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ δεν μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο, όμως αυτό είναι <u>άτοπο</u> αν ταυτόχρονα τα κ,λ είναι άρτιοι αριθμοί διότι οι άρτιοι πάντα απλοποιούνται!

Άρα η υπόθεση που κάναμε ως αληθής, δηλαδή ότι:

«ο $\sqrt{2}$ να είναι ρητός»

δεν είναι αληθής, είναι δηλαδή ψευδής δηλαδή καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι:

«ο $\sqrt{2}$ να είναι άρρητος».

Α14 Να δείξετε ότι:

i) Αν α ρητός και β άρρητος, τότε $\alpha+\beta$ άρρητος.

ii) Αν α ρητός, με $\alpha\neq 0$, και β άρρητος, τότε $\alpha\cdot\beta$ άρρητος.

Λύση:

Για την <u>πρώτη περίπτωση</u> έχουμε στην υπόθεση (δεδομένο) ότι

ο αριθμός α είναι ρητός

και ότι

ο αριθμός β είναι άρρητος.

Εμείς τώρα θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\alpha+\beta$ είναι άρρητος, επομένως θα υποθέσουμε την αντίθετη πρόταση ως αληθής δηλαδή ότι:

ο αριθμός α+β είναι ρητός

Δηλαδή ο αριθμός γ=α+β είναι ρητός. Τότε θα είναι και ότι ο αριθμός β=γ-α θα είναι ρητός ως διαφορά ρητών αριθμών. Όταν αφαιρούμε δύο ρητούς δηλαδή δύο κλάσματα της μορφής $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ πάντα προκύπτει ένα κλάσμα της ίδια μορφής, π.χ.

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=\frac{-1}{6}$$

Όμως στην υπόθεση έχουμε ότι ο αριθμός β είναι άρρητος και όχι ρητός που αποδείξαμε! Δηλαδή οδηγηθήκαμε σε άτοπο.

Επομένως ο σωστός ισχυρισμός είναι ο αντίθετος αυτού που δεχτήκαμε εξ αρχής, δηλαδή ότι:

ο αριθμός α+β είναι άρρητος

Σε αυτό το σημείο να πούμε ότι το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο δύο ρητών αριθμών είναι ρητός.

Για την δεύτερη περίπτωση υποθέτουμε ότι:

ο αριθμός $\alpha\cdot\beta$ είναι ρητός.

επομένως θα είναι ρητός και ο $\gamma=\alpha\cdot\beta$, που γράφεται ως $\beta=\frac{\gamma}{\alpha}$. Γιατί οι αριθμοί γ και α είναι ρητοί άρα και το πηλίκο β θα είναι και αυτός ρητός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση που ορίζει ο αριθμός β να είναι άρρητος. Επομένως έχουμε άτοπο

Δηλαδή καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι

ο αριθμός $\alpha\cdot\beta$ είναι άρρητος.

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να καταλάβουμε ποιος από τους αριθμούς α ή β είναι μεγαλύτερος αρκεί να τους αφαιρέσουμε:

$$\alpha-\beta$$

και αν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο από το μηδέν τότε ο α είναι μεγαλύτερος από τον β. Γράφουμε:

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow a-\beta>0 \qquad (49)$$

ενώ, αν το αποτέλεσμα είναι μικρότερο του μηδενός τότε ο α είναι μεγαλύτερος από τον β. Γράφουμε:

$$\alpha<\beta \Leftrightarrow a-\beta<0 \qquad (50)$$

Ισχύουν και τα αντίστροφα.

Όπως γνωρίζετε οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν πάνω σε μία ευθεία. Τοποθετούμε του μεγαλύτερους δεξιότερα από τους μικρότερους. Δηλαδή αν $\alpha>\beta$ τότε ο α είναι δεξιότερα από τον β. Γιαυτό τον λόγο έχουμε και ο άξονας αναπαριστάτε με ένα βέλος που έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να πούμε ότι δύο αριθμοί είναι ίσοι όταν:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow a-\beta=0 \qquad (51)$$

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει ότι

$$\alpha>\beta \text{ ή } \alpha=\beta$$

τότε γράφουμε $\alpha\geq\beta$ και διαβάζουμε: «α μεγαλύτερος ή ίσος του β».

Όταν δύο ή περισσότεροι αριθμοί είναι θετικοί τότε και το άθροισμά τους θα είναι θετικός. Σκεφτείτε το αριθμητικό παράδειγμα: $2+4=6$. Γράφουμε:

$$\alpha>0\, \kappa\alpha\iota\, \beta>0 \Rightarrow \alpha+\beta>0 \qquad (52)$$

Προσέξτε ότι έχουμε το μονό βέλος (συνεπάγεται) διότι το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, π.χ.

$-2+4>0$ ενώ $-2<0$ και $4>0$

Όμοια αν δύο αριθμοί είναι και οι δύο αρνητικοί τότε υποχρεωτικά και το άθροισμά τους θα είναι αρνητικός αριθμός. Σκεφτείτε: $-2-4=-6$. Εδώ γράφουμε:

$$\alpha<0\, \kappa\alpha\iota\, \beta<0 \Rightarrow \alpha+\beta<0 \qquad (53)$$

Πάλι δεν ισχύει το αντίστροφο.

Αν ο ένα αριθμός είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός τότε το αποτέλεσμα μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό ανάλογα ποιος αριθμός θα έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Σκεφτείτε: $-4+4=+2$ ενώ $+2-4=-2$

Όπως γνωρίζετε από τον πολλαπλασιασμό αν δύο αριθμοί είναι και οι δύο θετικοί ή αρνητικοί (δηλαδή είναι ομόσημοι) τότε το γινόμενό τους είναι μεγαλύτερο του μηδενός, δηλαδή:

$$\alpha, \beta\, ομόσημοι \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta>0 \Leftrightarrow \frac{a}{\beta}>0 \qquad (54)$$

αν οι δύο αριθμοί είναι ο ένας θετικός και ο άλλος αρνητικός (δηλαδή ετερόσημοι) τότε το γινόμενό τους είναι μικρότερο του μηδενός, δηλαδή:

$$\alpha, \beta\, ετερόσημοι \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta<0 \Leftrightarrow \frac{a}{\beta}<0 \qquad (55)$$

Κάτι που είναι πολύ σημαντικό και θα το χρησιμοποιήσουμε στις ασκήσεις είναι ότι το τετράγωνο ενός αριθμού (που δεν είναι όμως το μηδέν) είναι πάντα θετικό. Αν ο αριθμός είναι το μηδέν τότε το τετράγωνό του είναι ίσο μηδέν. Δηλαδή:

$$\alpha^2\geq 0, για\, κάθε\, αριθμό\, \alpha\in\mathbb{R} \qquad (56)$$

Παρακάτω δίνουμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα:

$0^2=0$, $(-1)^2=1>0$, $3^2=9>0$ κ.τ.λ.

Ας μελετήσουμε τώρα την ποσότητα:

$$\alpha^2+\beta^2 \text{ με } \alpha, \beta\in\mathbb{R}$$

αρχίζουμε π.χ. με μερικά αριθμητικά παραδείγματα:

$$(-1)^2+2^2=5>0,\ (-2)^2+2^2=8>0$$

$$3^2+2^2=13>0,\ 0^2+0^2=0$$

$$0^2+(-1)^2=1>0,\ 3^2+0^2=9>0$$

Παρατηρείστε λοιπόν ότι όποιον αριθμό βάλουμε στα α και β (που να μην είναι μηδέν και οι δύο ταυτόχρονα) το αποτέλεσμα προκύπτει πάντα θετικό.

Υπάρχει μόνο μία περίπτωση όπου και οι δύο αριθμοί είναι ταυτόχρονα μηδέν και έτσι το παραπάνω άθροισμα είναι μηδέν. Δηλαδή συνολικά γράφουμε:

$$\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow a=0 \;και\; \beta=0 \qquad (57)$$

και

$$\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow a\neq 0 \;και\; \beta\neq 0 \qquad (58)$$

Θα συνεχίσουμε τώρα με τις **ιδιότητες των ανισοτήτων**.

(1) Αρχικά αν έχουμε τρεις αριθμούς και ο πρώτος είναι μεγαλύτερος από τον δεύτερο, ενώ ο δεύτερος μεγαλύτερος από τον τρίτο τότε θα είναι και ο πρώτος μεγαλύτερος από τον τρίτο. Ορίστε ένα αριθμητικό παράδειγμα:

αν $10>4$ και $4>2$ επομένως $10>2$

με την χρήση συμβόλων αυτό γράφεται ως εξής:

$$\alpha>\beta \;και\; \beta>\gamma \Rightarrow \alpha>\gamma \qquad (59)$$

(2) Αν έχουμε μία ανισότητα α>β τότε μπορούμε **να προσθέσουμε και στα δύο μέλη έναν οποιοδήποτε αριθμό**. Η ανισότητα που θα προκύψει με αυτόν τον τρόπο εξακολουθεί να είναι αληθής. Ορίστε ένα αριθμητικό παράδειγμα:

αν $10>5$ τότε και $10+2>5+2$

με την χρήση συμβόλων γράφουμε:

$$\alpha>\beta=\Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma \qquad (60)$$

(3) Αν έχουμε μία ανισότητα τότε μπορούμε να **πολλαπλασιάσουμε και στα δύο μέλη έναν αριθμό**, αρκεί να μην είναι το μηδέν. Αν ο αριθμός που πολλαπλασιάζουμε είναι θετικός τότε η φορά της ανισότητας (η διάταξη των αριθμών) παραμένει ίδια ενώ αν είναι αρνητικός η φορά αλλάζει. Ορίστε ένα αριθμητικό παράδειγμα:

αν $10>5$ τότε $10\cdot 2>5\cdot 2$ ή $20>10$, ενώ

αν $10>5$ τότε $10\cdot(-2)<5\cdot(-2)$ ή $-20<-10$

παρατηρείστε όμως τι θα γίνει αν πολλαπλασιάσουμε με το μηδέν:

$10<5$ τότε $10\cdot 0=5\cdot 0$ ή $0=0$

με την χρήση συμβόλων γράφουμε:

$$Αν\;\; \gamma>0 \;\; τότε: \;\; \alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma \;, ενώ \qquad (61)$$

$$Αν\;\; \gamma<0 \;\; τότε: \;\; \alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma \qquad (62)$$

(4) Αν έχουμε δύο ανισότητες τότε μπορούμε να τις **προσθέσουμε κατά μέλη**. Τότε η ανισότητα που θα προκύψει είναι επίσης αληθής. Ορίστε ένα αριθμητικό παράδειγμα:

Αν $10>5$ και $9>8$ τότε $10+9>5+8$ ή $19>13$

Το λάθος που γίνεται εδώ πολλές φορές είναι να έχουμε γράψει τις ανισότητες με λάθος κατεύθυνση. Ορίστε τι εννοούμε:

Αν $10>5$ και $8<9$ τότε $10+8(?)5+9$

Γράφουμε με την χρήση συμβόλων:

$$\alpha>\beta \;και\; \gamma>\delta \Rightarrow \alpha+\gamma>\beta+\delta \qquad (63)$$

(5) Αν έχουμε δύο ανισότητες τότε μπορούμε αυτές να τις **πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη**. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να προσέξουμε αρκετά πράγματα. (α) οι ανισότητες να έχουν ίδια κατεύθυνση (β) όλοι οι αριθμοί να είναι θετικοί.

Για α,β,γ,δ θετικούς γράφουμε με την χρήση συμβόλων:

$$\alpha>\beta \;και\; \gamma>\delta \Rightarrow \alpha\; cdod\; \gamma>\beta\cdot\delta \qquad (64)$$

(6) Για θετικούς αριθμούς α και β και για θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu}>\beta^{\nu} \qquad (65)$$

(7) Για θετικούς αριθμούς α και β και για θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu}=\beta^{\nu} \qquad (66)$$

Θα κάνουμε μερικά παραδείγματα από το σχολικό βιβλίο.

Π6 (Εφαρμογή 1 σελ. 58) Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν α,β ομόσημοι αριθμοί τότε $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{\beta}$

(ii) Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$

(iii) Αν $\alpha>0$, τότε $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$

Λύση:

Για να λύσουμε την πρώτη περίπτωση πρέπει αρχικά να καταλάβουμε ότι οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι, οπότε σύμφωνα με την 54 έχουμε ότι:

$$\alpha\beta>0 \;\; ή \;\; \frac{1}{\alpha\beta}>0$$

Θα κάνουμε μία ευθεία απόδειξη ξεκινώντας από το πρώτο μέλος της ισοδυναμίας με σκοπό να φτάσουμε στο δεύτερο (βλέπε 32). Εδώ αφού υπάρχει η ισοδυναμία πρέπει να εξεταστεί και η αντίθετη πορεία. Επομένως:

$$\alpha<\beta$$

σύμφωνα με την ιδιότητα 61 πολλαπλασιάζουμε και στα δύο μέλη την θετική ποσότητα $\frac{1}{\alpha\beta}$

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha\beta}<\beta\cdot\frac{1}{\alpha\beta}$$

κάνουμε τις απλοποιήσεις

$$\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha}$$

προφανώς οι πράξεις μπορούν να γίνουν και αντίθετα, επομένως γράφουμε την ισοδυναμία:

$$Αν\;\; \alpha\beta>0 \;\; τότε \;\; \alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{\beta}$$

Για την δεύτερη περίπτωση θα κάνουμε τον δεύτερο τρόπο της ευθείας απόδειξης. Βλέπε 33.

Θα ξεκινήσουμε με την σχέση που μας δίνει. Σε αυτό το σημείο δεν γνωρίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής. Θα συνεχίσουμε με ισοδυναμίες μέχρι να φτάσουμε σε μία κοινός αληθής σχέση. Λόγω των ισοδυναμιών θα είναι αληθείς και όλες οι προηγούμενες σχέσεις. Επομένως:

$$\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \quad \Leftrightarrow$$

προσθέτω και τις δύο πλευρές το $-2\alpha\beta$. Βλέπε ιδιότητα 60. Προφανώς γίνεται και η αντίθετη πράξη.

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 2\alpha\beta-2\alpha\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

το πρώτο μέλος είναι το τετράγωνο της διαφοράς (ταυτότητα). Όλες οι παραπάνω πράξεις γίνονται και αντίθετα.

$$(\alpha-\beta)^2 \geq 0$$

Η τελευταία σχέση λόγω της 56 είναι αληθής. Επομένως λόγω των ισοδυναμιών είναι αληθής και η πρώτη.

Για την <u>τρίτη περίπτωση</u> θα εργαστούμε αναλόγως με την (ii).

Η πρόταση που μας δίνει αποτελείται από:

(1) την υπόθεση: $\alpha>0$ που μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε σαν δεδομένο και

(2) από το συμπέρασμα όπου θέλουμε να καταλήξουμε: $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geq 2$

Ξεκινάμε από το συμπέρασμα χωρίς να γνωρίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2 \quad \Leftrightarrow$$

πολλαπλασιάζουμε με $\alpha>0$ σύμφωνα με την ιδιότητα 61. Προφανώς γίνεται και η αντίστροφη πράξη (να πολλαπλασιάσουμε με $\dfrac{1}{a}>0$).

Άρα:

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\alpha \geq 2\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+1 \geq 2\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-2\alpha+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1)^2 \geq 0$$

το οποίο ισχύει πάντα λόγω της 56

προφανώς όλες οι παραπάνω πράξεις γίνονται και με την αντίστροφη πορεία, επομένως λόγω των ισοδυναμιών θα είναι αληθής και η πρώτη που θέλουμε να δείξουμε.

A15 (Άσκηση Α1 σελ. 59) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha^2+9\geq 6\alpha$

(ii) $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$

Λύση:

Για την <u>πρώτη περίπτωση</u> θα κάνουμε μία ευθεία απόδειξη σύμφωνα με την δεύτερη μέθοδο βλέπε 33. Δηλαδή θα αρχίσουμε από την ανισότητα που μας δίνει χωρίς να γνωρίζουμε αν αρχικά είναι αληθής ή ψευδής και θα καταλήξουμε σε μία πρόταση που είναι αληθής, επομένως θα είναι αληθής και αρχική αφού έχουμε χρησιμοποιήσει τις ισοδυναμίες. Δηλαδή:

$$\alpha^2+9\geq 6\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-6\alpha+9\geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(a-3)^2\geq 0$$

Η τελευταία πρόταση ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λόγω της της 56. Επομένως λόγω των ισοδυναμιών θα είναι αληθής και η πρώτη.

Για την <u>δεύτερη περίπτωση</u> θα εργαστούμε αναλόγως:

$$2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2+2\beta^2\geq\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)^2\geq 0$$

που ισχύει πάντα.

A16 (Άσκηση Α2 σελ. 59) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+1\geq 0$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση:

Θα εργαστούμε με την μέθοδο της ευθείας απόδειξης και μάλιστα με την δεύτερη περίπτωση βλέπε 33. Θα αρχίσουμε λοιπόν με την πρόταση που ακόμα δεν γνωρίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής:

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1\geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

ομαδοποιούμε τους όρους κάνοντας χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης:

$$(\alpha^2-2\alpha+1)+\beta^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

η πρώτη παρένθεση είναι η ταυτότητα: τετράγωνο διαφοράς:

$$(\alpha-1)^2+\beta^2\geq 0$$

Η τελευταία όμως πρόταση είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λόγω των 57 και 58. Έτσι αφού έχουμε χρησιμοποιήσει τις ισοδυναμίες για να φτάσουμε σε αυτή την σχέση θα είναι αληθείς και όλες οι προηγούμενες, δηλαδή και η πρώτη από αυτές.

Η ισότητα:

$$(\alpha-1)^2+\beta^2=0$$

λόγω της 57 ισχύει όταν:

$$\alpha-1=0 \text{ και (ταυτόχρονα) } \beta=0$$

δηλαδή

$$\alpha=1 \text{ και } \beta=0$$

A17 (Άσκηση Α3 σελ. 59) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y στις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Αν $(x-2)^2+(y+1)^2=0$

(ii) Αν $x^2+y^2-2x+4y+5=0$

Λύση:

Για την <u>πρώτη περίπτωση</u> λόγω της 57 έχουμε:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x-2=0 \text{ και (ταυτόχρονα) } y+1=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x=2 \text{ και } y=-1$$

Για την δεύτερη περίπτωση θα εργαστούμε αναλόγως αφού πρώτα κάνουμε μερικές πράξεις:

$$x^2+y^2-2x+4y+5=0 \Leftrightarrow$$

ομαδοποιούμε κατάλληλα ώστε να εμφανιστούν οι ταυτότητες. Αλλά προσέξτε ότι έχουμε ένα μικρό πρόβλημα αφού οι όροι είναι 5 και όχι 6 που χρειαζόμαστε για να κατασκευάσουμε τις δύο ταυτότητες. Μπορούμε να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα με το να αντικαταστήσουμε το 5 με $4+1$!

$$x^2+y^2-2x+4y+4+1=0 \Leftrightarrow$$

και τώρα ομαδοποιούμε κατάλληλα:

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=0 \Leftrightarrow$$

Επομένως λόγω της 57 έχουμε:

$$x-1=0 \text{ και } y+2=0 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{ και } y=-2$$

Μια ανισότητα που έχει τρία μέλη όπως η παρακάτω:

$$\alpha<\beta<\gamma$$

είναι στην πραγματικότητα δύο ανισότητες τοποθετημένες μαζί:

$$\alpha<\beta \text{ και (ταυτόχρονα) } \beta<\gamma$$

Για αυτές τις πολλαπλές ανισότητες μπορούμε να κάνουμε τις ίδιες πράξεις και με τις απλές.

Π7 (Εφαρμογή 2 σελ. 59) Αν $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$ και $-\frac{2}{3}<y<\frac{5}{6}$ να αποδείξετε ότι:

$$-11<8x-12y+3<17$$

Λύση:

Σκοπός αυτής της ομάδας ασκήσεων είναι να μάθουμε τον τρόπο που μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ανισότητα ξεκινώντας με πρώτη ύλη κάποιες άλλες ανισότητες.

Σε αυτό το παράδειγμα πρέπει να κατασκευάσουμε την ανισότητα (συμπέρασμα):

$$-11<8x-12y+3<17$$

ξεκινώντας και χρησιμοποιώντας τις:

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4} \text{ και } -\frac{2}{3}<y<\frac{5}{6}$$

Παρατηρούμε ότι στην ανισότητα που θέλουμε να κατασκευάσουμε υπάρχει το $8x$. Επομένως θα πάρουμε την πρώτη ανισότητα που μας δίνει:

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$$

και θα πολλαπλασιάσουμε όλα τα μέλη σύμφωνα με την ιδιότητα 61 τον θετικό αριθμό 8, ώστε να εμφανιστεί το 8x.

$$8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)<8x<8\cdot\frac{3}{4}$$

$$-4<8x<6 \quad \underline{\text{σχέση I}}$$

Δεύτερον, παρατηρούμε ότι στην ανισότητα που θέλουμε να κατασκευάσουμε υπάρχει το -12x. Επομένως θα πάρουμε την δεύτερη ανισότητα που μας δίνεται:

$$-\frac{2}{3}<y<\frac{5}{6}$$

και θα πολλαπλασιάσουμε σε όλα τα μέλη τον αριθμό $(-12)<0$ σύμφωνα με την ιδιότητα 62. Προσέξτε ότι λόγω του αρνητικού αριθμού που πολλαπλασιάζουμε η φορά της ανισότητα αλλάζει.

$$(-12)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)>-12y>-12\cdot\frac{5}{6}$$

$$8>-12y>-10 \quad \underline{\text{σχέση II}}$$

παρατηρούμε ότι οι σχέσεις I και II έχουν αντίθετες κατευθύνσεις, εννοούμε ότι στην σχέση I έχουμε το σύμβολο $<$ ενώ στην II το σύμβολο $>$.

Αυτό θα πρέπει να το αλλάξουμε. Απλά γράφουμε την σχέση II αντίθετα:

$$-10<-12x<8 \quad \underline{\text{σχέση III}}$$

προσθέτουμε τώρα κατά μέλη τις σχέσει I και III σύμφωνα με την ιδιότητα 63:

$$-4+(-10)<8x-12y<6+8$$

$$-14<8x-12y<14$$

μέχρι τώρα έχουμε κατασκευάσει το $8x-12y$ και μας μένει να εμφανιστεί και ένα $+3$ μέσα στην ανισότητα που θέλουμε να κατασκευάσουμε:

Αυτό θα το καταφέρουμε με το να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό (το +3) σε όλα τα μέλη:

$$-14+3<8x-12y+3<14+3$$

$$-11<8x-12y+3<17$$

Α18 (Άσκηση Α4 σελ. 60) Αν $4{,}5<x<4{,}6$ και $5{,}3<y<5{,}4$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

(i) $x+y$ (ii) $x-y$

(iii) $\frac{x}{y}$ (iv) x^2+y^2

Λύση:

Για την πρώτη περίπτωση (i) απλά θα προσθέσουμε κατά μέλη (βλέπε 63) τις ανισότητες που μας δίνονται. Απλά προσέχουμε ότι οι ανισότητες έχουν την ίδια κατεύθυνση.

$$4{,}5+5{,}3<x+y<4{,}6+5{,}4$$

$$9{,}8<x+y<10{,}0$$

Για την δεύτερη περίπτωση (ii) πολύ από εσάς θα μπείτε στον πειρασμό να αφαιρέσετε κατά μέλη, αλλά προσέξτε ότι δεν αναφέρεται πουθενά τέτοια ιδιότητα και έτσι δεν μπορούμε να αφαιρούμε κατά μέλη!

Η αφαίρεση όμως είναι η πρόσθεση του αντιθέτου επομένως αρχικά πολλαπλασιάζουμε με -1 την δεύτερη ανίσωση ώστε το y να μεταπραπεί σε $-y$:

$$5{,}3<y<5{,}4$$

$$(-1)\cdot 5{,}3 > -y > (-1)\cdot 5{,}4$$

$$-5{,}3 > -y > -5{,}4$$

και γράφουμε την ανισότητα αντίθετα, ώστε να ταιριάζει με την πρώτη:

$$-5{,}4 < -y < -5{,}3$$

τώρα προσθέτουμε κατά μέλη σύμφωνα με την ιδιότητα 63 τις σχέσει:

$$4{,}5 < x < 4{,}6 \quad \text{και} \quad -5{,}4 < -y < -5{,}3$$

και έχουμε:

$$4{,}5+(-5{,}4) < x+(-y) < 4{,}6+(-5{,}3)$$

$$-0{,}9 < x-y < -0{,}7$$

Στην τρίτη περίπτωση (iii) πάλι έχουμε το ίδιο πρόβλημα διότι δεν υπάρχει πουθενά κάποια ιδιότητα που να μας επιτρέπει να διαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες.

Εμείς όμως θα χρησιμοποιήσουμε τον πολλαπλασιασμό του αντιστρόφου γιατί η διαίρεση ορίζεται με αυτόν τον τρόπο.

Επομένως παίρνουμε την δεύτερη ανισότητα:

$$5{,}3 < y < 5{,}4$$

την χωρίζουμε στις επιμέρους ανισότητες που αποτελείται:

$$5{,}3 < y \quad \text{και} \quad y < 5{,}4$$

σε κάθε μία από αυτές πολλαπλασιάζουμε τον θετικό αριθμό $\frac{1}{y}$ (ο y είναι θετικός διότι μας το λέει η ανισότητα: $5{,}3 < y < 5{,}4$) και σύμφωνα με την ιδιότητα 61 έχουμε:

$$5{,}3\cdot\frac{1}{y} < y\cdot\frac{1}{y} \quad \text{και} \quad y\cdot\frac{1}{y} < 5{,}4\cdot\frac{1}{y}$$

δηλαδή:

$$\frac{5{,}3}{y} < 1 \quad \text{και} \quad 1 < \frac{5{,}4}{y}$$

ακόμα πολλαπλασιάζω την πρώτη με $\frac{1}{5{,}3} > 0$ και την δεύτερη με $\frac{1}{5{,}4} > 0$, δηλαδή:

$$\frac{5{,}3}{y}\cdot\frac{1}{5{,}3} < 1\cdot\frac{1}{5{,}3} \quad \text{και} \quad 1\cdot\frac{1}{5{,}4} < \frac{5{,}4}{y}\cdot\frac{1}{5{,}4}$$

επομένως:

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{5{,}3} \quad \text{και} \quad \frac{1}{5{,}4} < \frac{1}{y}$$

και τα τοποθετώ πάλι όλα μαζί:

$$\frac{1}{5{,}4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5{,}3}$$

φυσικά εσείς για να καταλήξετε σε αυτή την σχέση μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη εφαρμογή 1i στην σελίδα 58 του σχολικού βιβλίου ή βλέπε το παράδειγμα Π6.

Τώρα θα πάρουμε τις σχέσεις:

$$4{,}5 < x < 4{,}6 \quad \text{και} \quad \frac{1}{5{,}4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5{,}3}$$

που παρατηρούμε ότι πληρούν τις προϋποθέσεις της ιδιότητας 64 και θα τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη:

$$4{,}5\cdot\frac{1}{5{,}4} < x\cdot\frac{1}{y} < 4{,}6\cdot\frac{1}{5{,}3}$$

$$\frac{45}{54} < \frac{x}{y} < \frac{46}{53}$$

Και τέλος για την τέταρτη περίπτωση (iv) εργαζόμαστε ως εξής:

Ξεκινάμε από τις ανισότητες

$$4{,}5 < x < 4{,}6 \quad \text{και} \quad 5{,}3 < y < 5{,}4$$

και εφαρμόζω την ιδιότητα 65. Προσέχω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις αυτής της ιδιότητας. Δηλαδή όλες οι βάσεις (οι αριθμοί 4,5, 4,6, 5,3, 5,4 και τα x,y είναι θετικά και σκοπεύω να υψώσω στην δεύτερη δύναμη ν=2 που είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός). Δηλαδή:

$$4{,}5^2 < x^2 < 4{,}6^2 \quad \text{και} \quad 5{,}3^2 < y^2 < 5{,}4^2 \iff$$

$$20{,}25 < x^2 < 21{,}16 \quad \text{και} \quad 28{,}09 < y^2 < 29{,}16$$

και τώρα θα προσθέσω κατά μέλη αυτές τις σχέσεις:

$$20{,}25+28{,}09 < x^2+y^2 < 21{,}16+29{,}16 \iff$$

$$48{,}34 < x^2+y^2 < 29{,}16$$

A19 (Άσκηση Α5 σελ. 60) Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2<x<3$ και $3<y<5$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1, να βρείτε τις δυνατές τιμές:

(i) της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου

(ii) του εμβαδού του νέου ορθογωνίου

Λύση:

Το νέο πλάτος του ορθογωνίου είναι $x+0{,}2$ ενώ το νέο μήκος θα είναι $y-0{,}1$.

Θα υπολογίσουμε τώρα μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνονται το νέο πλάτος και νέο μήκος του ορθογωνίου:

Στις σχέσεις:

$$2 < x < 3 \quad \text{και} \quad 3 < y < 5$$

προσθέτουμε σε όλα τα μέλη στην μεν πρώτη τον αριθμό 0,2 και στην δεύτερη τον $-0{,}1$ σύμφωνα με την ιδιότητα 60.

$$2+0{,}2 < x+0{,}2 < 3+0{,}2$$

$$3-01 < y-0{,}1 < 5-0{,}1$$

κάνουμε τις πράξεις:

$$2{,}2 < x+0{,}2 < 3{,}2 \quad \text{και} \quad 2{,}9 < y-01 < 4{,}9$$

Στο <u>πρώτο ερώτημα (i)</u> για να υπολογίσουμε την περίμετρο του νέου ορθογωνίου θα πάρουμε τον τύπο:

$$L=2\cdot(\text{Νεο Μήκος})+2\cdot(\text{Νεο Πλάτος})$$

$$L=2(x+0{,}2)+2(y-0{,}1)$$

Για να υπολογίσουμε τώρα μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται αυτή η ποσότητα

$$2(x+0{,}2)+2(y-0{,}1)$$

θα πάρουμε τις ανισότητες:

$$2{,}2<x+0{,}2<3{,}2 \text{ και } 2{,}9<y-01<4{,}9$$

και θα πολλαπλασιάσουμε σε όλα τα μέλη τον θετικό αριθμό 2:

$$4{,}4<2(x+0{,}2)<6{,}4 \text{ και } 5{,}8<2(y-01)<9{,}8$$

και μετά θα προσθέσουμε κατά μέλη:

$$10{,}2<2(x+0{,}2)+2(y-0{,}1)<16{,}2$$

δηλαδή:

$$10{,}2<L<16{,}2$$

Στο <u>δεύτερο ερώτημα (ii)</u> πρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου, από τον τύπο:

$$E=(\text{Νέο Πλάτος})\cdot(\text{Νέο Μήκος})$$

$$E=(x+0{,}2)(y-01)$$

Τώρα θα πάρουμε τις σχέσεις:

$$2{,}2<x+0{,}2<3{,}2 \text{ και } 2{,}9<y-01<4{,}9$$

οι οποίες πληρούν τις προϋποθέσεις της ιδιότητας 64 και θα τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη:

$$2{,}2\cdot 2{,}9<(x+0{,}2)(y-0{,}1)<3{,}2\cdot 4{,}9$$

$$6{,}38<E<16{,}68$$

A20 (Άσκηση Α6 σελ. 60) Αν $0\le\alpha<\beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta}$

Λύση:

Στην υπόθεση (δεδομένα) αυτής της άσκησης μας δίνεται ότι $0\le\alpha<\beta$

Αυτό σημαίνει τα παρακάτω:

$$\alpha\ge 0 \text{ και } \beta>0 \text{ και } \alpha<\beta$$

τα οποία και σκοπεύουμε να χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ότι η πρόταση $\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta}$ που είναι στο συμπέρασμα είναι αληθής.

Πριν προχωρήσουμε θα ασχοληθούμε με το πρόσημο των ποσοτήτων $1+\alpha$ και $1+\beta$.

Αν στις σχέσεις $\beta>0$ και $\alpha\ge 0$ προσθέσουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό 1 έχουμε:

$$1+\beta>0+1 \text{ και } 1+\alpha\ge 0+1$$

δηλαδή

$$1+\beta>1 \text{ και } 1+\alpha\ge 1$$

δηλαδή και οι δύο αυτές ποσότητες είναι θετικές (αφού είναι μεγαλύτερες από 1). Επομένως είναι και ομόσημες, και σύμφωνα με την ιδιότητα 54 είναι:

$$(1+\alpha)(1+\beta)>0$$

θα πάρουμε τώρα την σχέση:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta}\Leftrightarrow$$

που ακόμα δεν γνωρίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής και θα κάνουμε πράξεις που μπορούν αν γίνουν και αντίθετα (ισοδυναμία):

Θα πολλαπλασιάσουμε και στα δύο μέλη την θετική ποσότητα $(1+\alpha)(1+\beta)>0$

$$(1+\alpha)(1+\beta)\frac{\alpha}{1+\alpha}<(1+\alpha)(1+\beta)\frac{\beta}{1+\beta}\Leftrightarrow$$

κάνουμε τις απλοποιήσεις:

$$\alpha(1+\beta)<\beta(1+\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\alpha+\alpha\beta<\beta+\alpha\beta\Leftrightarrow$$

προσθέτω και στις δύο πλευρές το $-\alpha\beta$

$$\alpha+\alpha\beta-\alpha\beta<\beta+\alpha\beta-\alpha\beta\Leftrightarrow$$

$$\alpha<\beta$$

η οποία είναι μία αληθής πρόταση αφού μας το εγγυάται η εκφώνηση της άσκησης στην υπόθεση (δεδομένα).

Λόγω των ισοδυναμιών θα είναι αληθής και η αρχική πρόταση που θέλουμε να δείξουμε.

A21 (Άσκηση Α7 σελ. 60) Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

Έστω $x>5$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$x>5$$

$$5x>25$$

$$5x-x^2>25-x^2$$

$$x(5-x)>(5+x)(5-x)$$

$$x>5+x$$

$$0>5$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσα στην τελευταία γραμμή είναι ψευδές. Θα εξετάσουμε λοιπόν όλες τις γραμμές για να βρούμε το λάθος.

Από την πρώτη στην δεύτερη γραμμή έχουμε σωστή ισοδυναμία, αφού πολλαπλασιάζουμε και στις δύο πλευρές τον θετικό αριθμό 5, ιδιότητα 61:

$$x>5 \Leftrightarrow 5x>5\cdot 5 \Leftrightarrow 5x>25$$

Από την δεύτερη προς την τρίτη γραμμή έχουμε σωστή ισοδυναμία, αφού προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό $-x^2$. Ιδιότητα 60:

$$5x>25 \Leftrightarrow 5x-x^2>25-x^2$$

Στην επόμενη γραμμή έχουμε σωστές πράξεις. Κοινός παράγοντας και διαφορά τετραγώνου:

$$5x-x^2>25-x^2 \Leftrightarrow x(5-x)>(5-x)(5+x)$$

Στην επόμενη γραμμή προσπαθούμε να πολλαπλασιάσουμε και στα δύο μέλη με τον αριθμό $\frac{1}{5-x}$ με σκοπό να γίνει η απλοποίηση. Όμως θα έπρεπε να έχουμε εξετάσει το πρόσημο του αριθμού που πολλαπλασιάζουμε. Επομένως:

$$x>5 \Leftrightarrow 5-x<0$$

και έτσι

$$\frac{1}{5-x}<0$$

Άρα θα πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με έναν αρνητικό αριθμό, επομένως από την ιδιότητα 62:

$$x(5-x)>(5-x)(5+x) \quad \Leftrightarrow$$

$$x(5-x)\frac{1}{5-x}<(5-x)(5+x)\frac{1}{5-x} \quad \Leftrightarrow$$

Δηλαδή σε αυτό το σημείο άλλαξε η κατεύθυνση της ανισότητας

Μετά απλοποιούμε:

$$x<5+x \quad \Leftrightarrow$$

προσθέτουμε και στις δύο πλευρές το $-x$:

$$x-x<5+x-x \Leftrightarrow$$

$$0<5$$

που ισχύει.

A22 (Άσκηση Β1 σελ. 60) Δίνονται ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ με θετικούς όρους και ένας θετικός αριθμός γ. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν $\frac{\alpha}{\beta}<1$ τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}>\frac{\alpha}{\beta}$

(ii) Αν $\frac{\alpha}{\beta}>1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}<\frac{\alpha}{\beta}$

Λύση:

Στα δεδομένα (υπόθεση) αυτής της άσκησης έχουμε ότι $\alpha>0$ και $\beta>0$ και $\frac{\alpha}{\beta}>0$ και $\gamma>0$

Σχετικά με το πρώτο ερώτημα (i) έχουμε ακόμα ότι $\frac{\alpha}{\beta}<1$ ή $\alpha<\beta$ ως αληθές από την υπόθεση.

Ξεκινάμε από την ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι αληθής. Αυτή την στιγμή δεν γνωρίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής.

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}>\frac{\alpha}{\beta} \quad \Leftrightarrow$$

πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με την θετική ποσότητα: $\beta(\beta+\gamma)>0$. Είναι θετική αφού το β είναι θετικό και το β+γ είναι και αυτό θετικό ως άθροισμα θετικών ποσοτήτων.

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}\cdot\beta(\beta+\gamma)>\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta(\beta+\gamma) \quad \Leftrightarrow$$

$$\beta(\alpha+\gamma)>\alpha(\beta+\gamma)\Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma>\alpha\beta+\alpha\gamma\Leftrightarrow$$

$$\beta\gamma>\alpha\gamma\Leftrightarrow$$

πολλαπλασιάζω με $\frac{1}{\gamma}>0$

$$\beta>\alpha$$

που είναι αληθές από την υπόθεση, επομένως αφού έχουμε χρησιμοποιήσει τις ισοδυναμίες θα είναι αληθές και η πρώτη πρόταση που θέλουμε να δείξουμε ως αληθής.

Προφανώς η δεύτερη περίπτωση (ii) είναι ακριβώς ανάλογη με την πρώτη με διαφορά την κατεύθυνση των ανισοτήτων. Σας την αφήνω να την κάνετε σαν εφαρμογή.

A23 (Άσκηση Β2 σελ. 60) Αν $\alpha>1>\beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta>1+\alpha\beta$.

Λύση:

Στην υπόθεση έχουμε ότι

$$\alpha>1>\beta$$

αυτό σημαίνει τα εξής:

$\alpha>1$ (και θετικός), $\beta<1$ και $\alpha>\beta$

Αρχίζουμε με την πρόταση που μας δίνεται να αποδείξουμε ότι είναι αληθής. Αυτή την στιγμή δεν το γνωρίζουμε ακόμα.

$$\alpha+\beta>1+\alpha\beta \quad \Leftrightarrow$$

προσθέτω και στις δύο πλευρές το -1 και μετά το $-\alpha\beta$ και μετά τις πράξεις έχουμε:

$$\alpha+\beta-\alpha\beta-1>0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\alpha\beta)+(\beta-1)>0\Leftrightarrow$$

$$\alpha(1-\beta)+(\beta-1)>0\Leftrightarrow$$

$$(1-\beta)(\alpha-1)>0$$

που είναι αληθής διότι

$$\alpha>1\Leftrightarrow\alpha-1>0 \text{ και } \beta<1\Leftrightarrow 0<1-\beta$$

δηλαδή και οι δύο ποσότητες είναι θετικές (ομόσημες) βλέπε 54.

A24 (Άσκηση Β3 σελ. 60) Αν α, β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $(\alpha+\beta)(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})\geq 4$.

Λύση:

Αρχίζω με την παράσταση που θέλω να αποδείξω ότι είναι αληθής:

$$(\alpha+\beta)(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})\geq 4 \quad \Leftrightarrow$$

κάνω τις πράξεις μέσα στην δεύτερη παρένθεση:

$$(\alpha+\beta)\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\geq 4 \quad \Leftrightarrow$$

πολλαπλασιάζουμε και στα δύο μέλη την θετική ποσότητα $\alpha\beta>0$ αφού $\alpha>0$ και $\beta>0$ (ομόσημοι).

$$(\alpha+\beta)\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\alpha\beta\geq 4\alpha\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta\geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)^2\geq 0$$

που είναι πάντα αληθής βλέπε 56 . Επομένως λόγω της χρήσης των ισοδυναμιών θα είναι αληθής και η πρώτη πρόταση.

A25 (Άσκηση Β4 σελ. 60) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$

(ii) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq 0$

Λύση:

Για να αποδείξουμε την πρώτη περίπτωση (i) ξεκινάμε από την ανισότητα που μας δίνεται:

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

πολλαπλασιάζω με το 2 και τα δύο μέλη:

$$2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2\geq 2\cdot 0\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2\geq 0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+\alpha^2+\beta^2\geq 0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^2+\alpha^2+\beta^2\geq 0$$

η τελευταία αυτή σχέση είναι αληθής λόγω των 57 και 58. Επομένως θα είναι αληθής και η πρώτη λόγω των ισοδυναμιών.

Για να αποδείξουμε την δεύτερη περίπτωση (ii) εργαζόμαστε αναλόγως. Σαν την αφήνω ως εφαρμογή του προηγούμενου ερωτήματος.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού **ορίζεται** από τον τύπο:

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \alpha\nu\,\alpha\geq 0\\ -\alpha, & \alpha\nu\,\alpha<0\end{cases} \qquad (67)$$

ο ο οποίος χρησιμοποιείται **για να υπολογίσουμε την απόλυτη τιμή**. Ορίστε μερικά αριθμητικά παραδείγματα:

$$|0|=0$$

$$|2|=2$$

$$|-2|=-(-2)$$

$$|-7|=-(-7)=+7$$

Δηλαδή αν η ποσότητα που είναι μέσα στο απόλυτο είναι θετική τότε απλά την ξαναγράφουμε χωρίς το απόλυτο, ενώ αν είναι αρνητική αντικαταστούμε το απόλυτο με παρενθέσεις και μπροστά βάζουμε αρνητικό πρόσημο. Ορίστε ένα ακόμα παράδειγμα:

$$|\pi-4|=-(\pi-4)=4-\pi$$

στο παραπάνω παράδειγμα το π-4 είναι αρνητική ποσότητα.

Ενώ

$$|\pi-3|=\pi-3$$

αφού η ποσότητα $\pi-3$ είναι θετική.

Επίσης ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

(1) $|\alpha|=|-\alpha|\geq 0$ (68)

Για να το καταλάβουμε ας δούμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα:

$$|5|=|-5|=5\geq 0$$

$$|0|=|0|=0$$

(2) $|\alpha|\geq\alpha$ και $|\alpha|\geq-\alpha$ (69)

Ορίστε μερικά αριθμητικά παραδείγματα:

$$|5|=5 \text{ και } |5|>-5$$

$$|-6|>-6 \text{ και } |-6|=-(-6)=6$$

$$|0|=0$$

(3) $|\alpha|^2=\alpha^2$ (70)

Αυτή πρόταση είναι πολύ σημαντική. Ορίστε μερικά αριθμητικά παραδείγματα:

$$|5|^2=5^2 \text{ ή } |-5|^2=(-5)^2 \text{ ή } |0|^2=0^2$$

(4) Αν $\theta>0$ τότε $|x|=\theta\Leftrightarrow x=\theta\, ή\, x=-\theta$ (71)

Ορίστε μερικά αριθμητικά παραδείγματα:

$$|x|=5\Leftrightarrow x=5\, ή\, x=-5$$

Η πρόταση αυτή όπως και η επόμενη θα φανεί χρήσιμη όταν λύνουμε εξισώσεις με απόλυτες τιμές.

(5) Αν $\theta>0$ τότε $|x|=|\theta|\Leftrightarrow x=\theta\, ή\, x=-\theta$ (72)

παρακάτω δίνουμε τρεις σημαντικές ιδιότητες των απόλυτων τιμών μαζί με τις αποδείξεις τους:

(A) $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ (73)

Θα αποδείξουμε αυτή την σχέση με την ευθεία απόδειξη και μάλιστα με τον δεύτερο τρόπο. Βλέπε: 33.

Θα αρχίσουμε με την πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε ως αληθής. Αυτή την στιγμή δεν γνωρίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής.

$$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta| \quad \Leftrightarrow$$

αφού και τα δύο μέλη είναι θετικές ποσότητες (βλέπε 68) μπορούμε να τα υψώσουμε στην δεύτερη δύναμη (ν=2) σύμφωνα με την ιδιότητα 66:

$$|\alpha\cdot\beta|^2=(|\alpha|\cdot|\beta|)^2\Leftrightarrow$$

$$|\alpha\cdot\beta|^2=|\alpha|^2\cdot|\beta|^2\Leftrightarrow$$

σύμφωνα με την πρόταση 70 έχουμε:

$$(\alpha\cdot\beta)^2=\alpha^2\beta^2$$

που προφανώς είναι αληθής. Επομένως θα είναι αληθής και η αρχική σχέση λόγω των ισοδυναμιών.

(B) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$ (74)

Για να την αποδείξουμε εργαζόμαστε αναλόγως:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2=\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

που ισχύει.

(Γ) $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$ (75)

Εργαζόμαστε αναλόγως:

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow$$

για να υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δυο μέλη πρέπει να σιγουρευτούμε ότι είναι θετικά ή μηδέν. Πράγματι τα $|\alpha+\beta|\ge 0$, $|\alpha|\ge 0$ και $|\beta|\ge 0$, επομένως:

$$|\alpha+\beta|^2\le(|\alpha|+|\beta|)^2 \Leftrightarrow$$

$$|\alpha+\beta|^2\le|\alpha|^2+2|\alpha|\cdot|\beta|+|\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^2\le\alpha^2+2|\alpha||\beta|+\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\le\alpha^2+2|\alpha||\beta|+\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha\beta\le 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta\le|\alpha\beta|$$

η τελευταία σχέση είναι αληθής μόνο όταν ένα ή και τα δύο από τα α και β είναι μηδέν ή όταν τα α και β είναι ομόσημοι έτσι ώστε $\alpha\beta>0$ ή ετερόσημοι ώστε $\alpha\beta<0$. Βλέπε 69

Επομένως σε αυτές τις περιπτώσεις θα είναι αληθής και η αρχική, π.χ. αν $\alpha=-4$ και $\beta=-5$ έχω:

$$|(-4)+(-5)|\le|-4|+|-5| \text{ ή } |-9|\le 4+5 \text{ ή } 9\le 9$$

εδώ ισχύει η ισότητα.

Όταν όμως τα α και β είναι ετερόσημοι τότε αυτή η σχέση πάλι ισχύει, π.χ. για $\alpha=4$ και $\beta=-5$ έχω:

$$|4+(-5)|\le|4|+|-5| \text{ ή } |-1|\le 4+5 \text{ ή } 1\le 9$$

εδώ ισχύει η ανισότητα.

Η απόσταση δύο αριθμών α και β πάνω στην ευθεία των αριθμών συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ ή $d(\beta,\alpha)$ και δίνεται από τον τύπο:

$$d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)=|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha| \quad (76)$$

Μήκος ενός διαστήματος [α,β] ορίζεται η απόσταση $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$

Αν έχουμε δύο αριθμούς α και β πάνω σε έναν άξονα με α>β τότε το **μέσο του διαστήματος [α,β]** είναι ο αριθμός $x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (77)

ενώ ο αριθμός $\rho=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ είναι η **ακτίνα του διαστήματος**, δηλαδή η απόσταση από το κέντρο x_0 μέχρι το ένα άκρο α ή β. (78)

Τώρα έχουμε δύο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις:

(1) Αν θέλουμε να βρούμε όλους τους αριθμούς που βρίσκονται <u>μέσα</u> σε μία περιοχή του άξονα με κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ πρέπει να λύσουμε την έκφραση $|x-x_0|<\rho$. Δηλαδή:

Για $x_0\in\mathbb{R}$ και $\rho>0$, ισχύει:

$$\begin{aligned}|x-x_0|<\rho &\Leftrightarrow x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)\\ &\Leftrightarrow x_0-\rho<x<x_0+\rho\end{aligned} \quad (79)$$

Σε αυτή την περίπτωση επίσης γράφουμε:

$$d(x,x_0)<\rho \quad (80)$$

π,χ, αν θέλουμε να υπολογίσουμε όλους τους αριθμούς που βρίσκονται σε ένα διάστημα με κέντρο το $x_0=3$ και ακτίνα $\rho=2$ αρκεί να λύσουμε:

$$|x-3|<2 \Leftrightarrow x\in(1,5) \Leftrightarrow 1<x<5$$

Επίσης σε αυτή την περίπτωση γράφουμε:

$$d(x,3)<2$$

(2) Αν θέλουμε να βρούμε όλους τους αριθμούς που βρίσκονται <u>έξω</u> από μία περιοχή του άξονα με κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ πρέπει να λύσουμε την έκφραση $|x-x_0|>\rho$. Δηλαδή:

Για $x_0\in\mathbb{R}$ και $\rho>0$, ισχύει:

$$\begin{aligned}|x-x_0|>\rho &\Leftrightarrow x\in(-\infty,x_0-\rho)U(x_0+\rho,+\infty)\\ &\Leftrightarrow x<x_0-\rho \text{ ή } x>x_0+\rho\end{aligned} \quad (81)$$

Σε αυτή την περίπτωση επίσης γράφουμε:

$$d(x,x_0)>\rho \quad (82)$$

π,χ, αν θέλουμε να υπολογίσουμε όλους τους αριθμούς που βρίσκονται έξω από ένα διάστημα με κέντρο το $x_0=3$ και ακτίνα $\rho=2$ αρκεί να λύσουμε:

$$|x-3|>2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,5)\cup(1,+\infty) \Leftrightarrow x<1\cup x>5$$

Επίσης σε αυτή την περίπτωση γράφουμε:

$$d(x,3)>2$$

(3) Σε όλες τις περιπτώσεις μπορεί στο διάστημα να περιλαμβάνονται και τα άκρα του. Σε αυτή την περίπτωση βάζουμε και την ισότητα στις παραπάνω σχέσεις, π.χ.

για να υπολογίσουμε όλους τους αριθμούς που βρίσκονται μέσα στο διάστημα (μαζί με τα άκρα του διαστήματος) που έχει κέντρο το $x_0=-4$ και ακτίνα $\rho=6$ έχουμε:

$$d(x,-4)\le 6 \Leftrightarrow |x-(-4)|\le 6 \Leftrightarrow$$

$$x\in[-4-6,-4+6] \Leftrightarrow [-10,2]$$

(4) Οι παραπάνω τύποι 79 και 81 απλοποιούνται σημαντικά όταν $x_0=0$. Δηλαδή:

Για $\rho>0$, ισχύει:

$$|x|<\rho \Leftrightarrow x\in(-\rho,\rho) \Leftrightarrow -\rho<x<+\rho \quad (83)$$

Για $\rho>0$, ισχύει:

$$\begin{aligned}|x|>\rho &\Leftrightarrow x\in(-\infty,-\rho)\cup(\rho,+\infty)\\ &\Leftrightarrow x<-\rho \text{ ή } x>+\rho\end{aligned} \quad (84)$$

A26 (Άσκηση A1 σελ. 66) Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

(i) $|\pi-3|$ (ii) $|\pi-4|$

(iii) $|3-\pi|+|4-\pi|$ (iv) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-\sqrt{2}|$

Λύση:

Για να υπολογίσουμε μία απόλυτη τιμή (βλέπε 67) πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημο που έχει η ποσότητα που είναι μέσα στο απόλυτο. Αν αυτή η ποσότητα είναι θετική τότε απλά μετατρέπουμε την απόλυτη τιμή σε παρενθέσεις. Ενώ αν είναι αρνητική μετατρέπουμε πάλι σε παρενθέσεις αλλά αυτή την φορά βάζουμε και ένα αρνητικό πρόσημο μπροστά.

Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο παράδειγμα (i). Θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα:

$$|\pi-3|$$

Εμείς αρχικά θα υπολογίσουμε το πρόσημο της ποσότητας που είναι μέσα στην απόλυτη τιμή:

$$\pi-3\approx 3{,}14-3>0$$

Επομένως θα αντικαταστήσουμε την απόλυτη τιμή με παρενθέσεις:

$$|\pi-3|=(\pi-3)=\pi-3$$

Σχετικά με το δεύτερο παράδειγμα (ii) εργαζόμαστε αναλόγως. Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόλυτη τιμή:

$$|\pi-4|$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της ποσότητας:

$$\pi-4\approx 3{,}14-4<0$$

Επομένως θα μετατρέψουμε την απόλυτη τιμή σε παρενθέσεις και θα βάλουμε ένα αρνητικό πρόσημο μπροστά.

$$|\pi-4|=-(\pi-4)=-\pi+4$$

Για την τρίτη περίπτωση (iii) εργαζόμαστε αναλόγως:

$$|3-\pi|+|4-\pi|$$

Έχουμε $3-\pi<0$ και $4-\pi>0$, Επομένως:

$$|3-\pi|+|4-\pi|=-(3-\pi)+(4-\pi)$$

κάνουμε και τις πράξεις:

$$-3+\pi+4-\pi=1$$

Στην τέταρτη περίπτωση (iv) εργαζόμαστε αναλόγως:

$$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-\sqrt{2}|$$

$$-(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}=0$$

A27 (Άσκηση Α2 σελ. 66) Αν $3<x<4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x-3|-|4-x|$,

Λύση:

Για να υπολογίσουμε τις απόλυτες τιμές πρέπει να υπολογίσουμε τα πρόσημα των ποσοτήτων που είναι μέσα στις απόλυτες τιμές.

Στην υπόθεση (δεδομένα) μας δίνεται ότι:

$$3<x<4$$

που αυτό σημαίνει:

$$3<x \text{ και } x<4$$

που μπορούμε να γράψουμε:

$$0<x-3 \text{ και } x-4<0$$

Επομένως έχουμε:

$$|x-3|-|4-x|$$

$$(x-3)-[-(4-x)]$$

$$(x-3)+(4-x)$$

$$x-3+4-x=1$$

A28 (Άσκηση Α3 σελ. 66) Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x-3|-|4-x|$, όταν:

(i) $x<3$ (ii) $x>4$.

Λύση:

Για να υπολογίσουμε την πρώτη περίπτωση (i) πρέπει αν λάβουμε υπόψιν ότι

$$x<3\Leftrightarrow x-3<0$$

Όμως όταν το το $x<3$ είναι και

$$x<4\Leftrightarrow 0<4-x$$

Επομένως η απόλυτη τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$|x-3|-|4-x|$$

$$-(x-3)-(4-x)$$

$$-x+3-4+x=-1$$

Για να υπολογίσουμε την δεύτερη περίπτωση (ii) πρέπει αν λάβουμε υπόψιν ότι

$$x>4\Leftrightarrow 0>4-x$$

Όμως όταν το το $x>4$ είναι και

$$x>3\Leftrightarrow x-3>0$$

Επομένως η απόλυτη τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$|x-3|-|4-x|$$

$$(x-3)+(4-x)$$

$$x-3+4-x=1$$

A29 (Άσκηση Α4 σελ. 66) Αν $\alpha\neq\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\left|\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right|$.

Λύση:

Έχουμε διαδοχικά με ισότητες:

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right|$$

$$\left|\frac{-(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\right|$$

Εφαρμόζω τώρα την ιδιότητα 74:

$$\frac{|-(\beta-\alpha)|}{|\beta-\alpha|}$$

Όμως σύμφωνα με την πρόταση 68 έχουμε ότι:

$$\frac{|\beta-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=1$$

Ακόμα μπορούμε να λύσουμε την παράσταση με τον εξής τρόπο:

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right|=\left|\frac{-(\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}\right|=|-1|=1$$

A30 (Άσκηση Α5 σελ. 66) Αν $x\neq 0$ και $y\neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση: $A=\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}$.

Λύση:

Για να λύσουμε αυτή την άσκηση δεν έχουμε άλλη επιλογή από το να εξετάσουμε διάφορες περιπτώσεις αφού δεν γνωρίζουμε αν τα x και y είναι θετικά ή αρνητικά ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις απόλυτες τιμές.

Υπάρχουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Το $x>0$ και (ταυτόχρονα) το $y>0$ τότε η παράσταση απλοποιείται ως εξής σύμφωνα με τον ορισμό 67.

$$A=\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}=\frac{x}{x}+\frac{y}{y}=1+1=2$$

(β) Τα $x>0$ και $y<0$ τότε:

$$A=\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}=\frac{x}{x}-\frac{y}{y}=1-1=0$$

(γ) Τα $x<0$ και $y>0$ τότε:

$$A=\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}=-\frac{x}{x}+\frac{y}{y}=-1+1=0$$

(δ) Τα $x<0$ και $y<0$ τότε:

$$A=\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}=-\frac{x}{x}-\frac{y}{y}=-1-1=-2$$

A31 (Άσκηση Α6 σελ. 66) Αν Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε $2{,}37\,dm$. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ $0{,}005\,dm$. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε:

(i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης

(ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή D.

Λύση:

Για να λύσουμε ταυτόχρονα την πρώτη και δεύτερη περίπτωση (i) και (ii) πρέπει να σκεφτούμε τα παρακάτω:

Όταν μετράμε ένα φυσικό μέγεθος στην πραγματικότητα θέλουμε να υπολογίσουμε έναν πραγματικό αριθμό x (ή D) που αντιστοιχεί στο φυσικό μέγεθος.

Πάντα όμως θα υπάρχει ένα λάθος στην μέτρηση για πολλούς λόγους με τον κυριότερο λόγο να είναι ότι το όργανο με το οποίο μετράμε είναι ατελές, π.χ.

Όταν έχουμε ένα μέτρο και αυτό είναι διαβαθμισμένο ανά χιλιοστά τότε δεν μπορούμε να μετρήσουμε ποσότητες μικρότερες από ένα χιλιοστό γιατί δεν υπάρχουν οι κατάλληλες ενδείξεις πάνω στο μέτρο.

Κατά συνέπεια, στην περίπτωση της άσκησης μετρήσαμε μία ποσότητα ίση με

$$2{,}37\,dm$$

αλλά έχουμε ένα σφάλμα στην μέτρηση ίσο με

$$\pm 0{,}005\,dm\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι το πραγματικό μέγεθος x (ή D) του αντικειμένου που μετρήσαμε είναι μεταξύ των αριθμών:

$$2{,}37-0{,}005\,dm \text{ και } 2{,}37+0{,}005\,dm$$

ή αν κάνουμε τις πράξεις:

$$2{,}365\,dm \text{ και } 2{,}375\,dm$$

Εδώ έχουμε να κάνουμε με ένα διάστημα όπου μέσα σε αυτό θα βρίσκεται το πραγματικό μέγεθος x του αντικειμένου.

Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε:

$$x\in[2{,}365\,dm\,,\ 2{,}375\,dm]$$

Το διάστημα αυτό έχει κέντρο (βλέπε 77):

$$x_0=\frac{2{,}365+2{,}375}{2}=2{,}37\,dm$$

που είναι η κατά εκτίμηση μέτρηση που κάναμε (όχι ακριβής)

και ακτίνα (βλέπε 78):

$$\rho=\frac{2{,}375-2{,}365}{2}=0{,}005\,dm$$

που είναι το εκτιμώμενο σφάλμα αυτής της μέτρησης.

Επίσης μπορούμε να γράψουμε (βλέπε 79, 80)

$$d(x,2{,}37)\leq 0{,}005\Leftrightarrow|x-2{,}37|\leq 0{,}005$$
$$\Leftrightarrow x\in[2{,}365\,,\ 2{,}375]\Leftrightarrow 2{,}365\leq x\leq 2{,}375$$

A32 (Άσκηση Α7 σελ. 67) Να συμπληρώσετε τον πίνακα του σχολικού βιβλίου.

Λύση:

Για να λύσουμε τα παρακάτω παραδείγματα χρησιμοποιούμε τους τύπους 79, 80 ή 81, 82 ή 77, 78 με σκοπό αρχικά να υπολογίσουμε το κέντρο x_0 και την ακτίνα ρ του διαστήματος. Έπειτα συνεχίζουμε αναλόγως. Επομένως έχουμε:

(α) αν δίνεται ότι

$$|x-4|\leq 2$$

τότε μπορούμε με τους τύπους 79, 80 να γράψουμε ότι $x_0=4$ και $\rho=2$, επομένως

$$d(x,4)\leq 2$$

και για το διάστημα να γράψουμε

$$x\in[4-2\,,4+2]=[2{,}6]$$

(β) αν δίνεται ότι

$$|x+3|<4$$

τότε μπορούμε με τους τύπους 79, 80 να γράψουμε ότι $x_0=-3$ και $\rho=4$, επομένως

$$d(x,-3)<4$$

και για το διάστημα να γράψουμε

$$x\in(-3-4,-3+4)=(-7,1)$$

(γ) αν δίνεται ότι

$$|x-4|>2$$

τότε μπορούμε με τους τύπους 81, 82 να γράψουμε ότι $x_0=4$ και $\rho=2$, επομένως

$$d(x,4)>2$$

και για το διάστημα να γράψουμε

$$x\in(-\infty,2)\cup(6,+\infty)$$

(δ) αν δίνεται ότι

$$|x+3|\geq 4$$

τότε μπορούμε με τους τύπους 81, 82 να γράψουμε ότι $x_0=-3$ και $\rho=4$, επομένως

$$d(x,-3)\geq 4$$

και για το διάστημα να γράψουμε

$$x\in(-\infty,-7)\cup(-1,+\infty)$$

(ε) αν δίνεται ότι

$$d(x,5)<1$$

τότε μπορούμε με τους τύπους 79, 80 να γράψουμε ότι $x_0=5$ και $\rho=1$, επομένως

$$|x-5|<1$$

και για το διάστημα να γράψουμε

$$x\in(5-1,5+1)=(4,6)$$

(στ) αν δίνεται ότι

$$d(x,-1)>2$$

τότε μπορούμε με τους τύπους 81, 82 να γράψουμε ότι $x_0=-1$ και $\rho=2$, επομένως

$$|x+1|>2$$

και για το διάστημα να γράψουμε

$$x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$$

(στ) αν δίνεται ότι

$$d(x,5)\geq 1$$

τότε μπορούμε με τους τύπους 81, 82 να γράψουμε ότι $x_0=5$ και $\rho=1$, επομένως

$$|x-5|\geq 1$$

και για το διάστημα να γράψουμε

$$x\in(-\infty,4]\cup[6,+\infty)$$

(η) αν δίνεται ότι

$$d(x,-1)\leq 2$$

τότε μπορούμε με τους τύπους 79, 80 να γράψουμε ότι $x_0=-1$ και $\rho=2$, επομένως

$$|x+1|\leq 2$$

και για το διάστημα να γράψουμε

$$x\in(-3,1)$$

(θ) όταν δίνεται ότι:

$$x\in(-2,2)$$

τότε βρίσκω αρχικά το κέντρο και την ακτίνα από τους τύπους 77, 78:

$$x_0=\frac{-2+2}{2}=0 \text{ και } \rho=\frac{2-(-2)}{2}=2$$

επομένως από τους τύπους 79, 80 έχουμε ότι:

$$d(x,0)<2\Leftrightarrow|x-0|<2$$

(ι) όταν δίνεται ότι:

$$x\in[-5,1]$$

τότε βρίσκω αρχικά το κέντρο και την ακτίνα από τους τύπους 77, 78:

$$x_0=\frac{-5+1}{2}=-2 \text{ και } \rho=\frac{1-(-5)}{2}=3$$

επομένως από τους τύπους 79, 80 έχουμε ότι:

$$d(x,-2)\leq 3\Leftrightarrow|x+2|\leq 3$$

(ια) όταν δίνεται ότι:

$$x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

τότε βρίσκω αρχικά το κέντρο και την ακτίνα από τους τύπους 77, 78:

$$x_0=\frac{-2+2}{2}=0 \text{ και } \rho=\frac{2-(-2)}{2}=2$$

επομένως από τους τύπους 81, 82 έχουμε ότι:

$$d(x,0)\geq 2\Leftrightarrow|x-0|\geq 2$$

(ιβ) όταν δίνεται ότι:

$$x\in(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$$

τότε βρίσκω αρχικά το κέντρο και την ακτίνα από τους τύπους 77, 78:

$$x_0=\frac{-5+1}{2}=-2 \text{ και } \rho=\frac{1-(-5)}{2}=3$$

επομένως από τους τύπους 81, 82 έχουμε ότι:

$$d(x,-2)>3\Leftrightarrow|x+2|>3$$

A33 (Άσκηση Β1 σελ. 67) Να αποδείξετε ότι

$$|\alpha-\beta|\leq|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$$

Λύση:

Θα εργαστούμε ανάλογα με την απόδειξη της ιδιότητα 75.

$$|\alpha-\beta|\leq|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta| \quad\Leftrightarrow$$

$$|\alpha-\beta|^2\leq(|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|)^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)^2\leq|\alpha-\gamma|^2+2|\alpha-\gamma||\gamma-\beta|+|\gamma-\beta|^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)^2 \le (\alpha-\gamma)^2 + 2|\alpha-\gamma||\gamma-\beta| + (\gamma-\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \le \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + 2|(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)| + \gamma^2 - 2\beta\gamma + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$-2\alpha\beta + 2\alpha\gamma - 2\gamma^2 + 2\beta\gamma \le 2|(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)| \Leftrightarrow$$

$$2\alpha(\gamma-\beta) - 2\gamma(\gamma-\beta) \le 2|(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)| \Leftrightarrow$$

$$2(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta) \le 2|(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)|$$

που είναι αληθές λόγω της 69. Επομένως θα είναι αληθής και η αρχική.

Α34 (Άσκηση Β2 σελ. 67) Αν $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha = \frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$

(ii) $\beta = \frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$

Λύση:

Για να αποδείξουμε την πρώτη περίπτωση (i) θα χρησιμοποιήσουμε την ευθεία απόδειξη και μάλιστα την μέθοδο 32. Θα αρχίσουμε από το δεύτερο μέλος αυτής της σχέσης με σκοπό να φτάσουμε στο πρώτο.

$$\frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$$

αφού $\alpha>\beta$ έχουμε $\alpha-\beta>0$ και $|\alpha-\beta|=\alpha-\beta$

$$\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

Για την δεύτερη περίπτωση (ii) εργαζόμαστε αναλόγως. Σας την αφήνω ως εφαρμογή.

Α35 (Άσκηση Β3 σελ. 67) Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y:

(i) Η ισότητα $|x|+|y|=0$

(ii) Η ανισότητα $|x|+|y|>0$

Λύση:

Σχετικά με την πρώτη περίπτωση (i), πρέπει να σκεφτείτε ότι οι ποσότητες $|x|$ και $|y|$ είναι πάντα θετικές ή μηδέν.

Επομένως αν προσθέσετε δύο θετικές ποσότητες το αποτέλεσμα θα είναι θετικό και όχι μηδέν. Η ισότητα που έχουμε όμως έχει μηδενικό αποτέλεσμα.

Επομένως σε αυτή την ισότητα δεν μπορεί τα $|x|$ και $|y|$ να είναι θετικοί αριθμοί.

Επίσης δεν μπορεί οι αριθμοί $|x|$ και $|y|$ να είναι ένας από αυτούς μηδέν και ο άλλος όχι, γιατί και σε αυτή την περίπτωση δεν θα είχαμε μηδενικό αποτέλεσμα.

Υπάρχει όμως ακόμα μία περίπτωση οι αριθμοί $|x|$ και $|y|$ να είναι και οι δύο ταυτόχρονα μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση θα είναι μηδέν και το άθροισμα, επομένως θα αληθεύει η ισότητα που μας δίνεται.

Επομένως:

$$|x|+|y|=0 \Leftrightarrow$$

$$|x|=0 \text{ και } |y|=0 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \text{ και } y=0$$

Προφανώς για την περίπτωση (ii) μετά από όσα είπαμε θα ισχύει για όλους του αριθμούς εκτός από το $x=0$ και το $y=0$ ταυτόχρονα.

$$|x|+|y|>0 \Leftrightarrow$$

$$x\neq 0 \text{ και } y\neq 0$$

Δηλαδή μπορούμε να βάλουμε στην θέση του x και y όποιον αριθμό θέλουμε ακόμη και μηδέν εκτός από την περίπτωση να βάλουμε μηδέν και στους δύο ταυτόχρονα.

Α36 (Άσκηση Β4 σελ. 68) Έστω $0<\alpha<\beta$

(i) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$1,\ \frac{\alpha}{\beta} \text{ και } \frac{\beta}{\alpha}$$

(ii) Να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ό,τι ο αριθμός $\frac{\beta}{\alpha}$

Λύση:

Για την πρώτη περίπτωση (i) πρέπει αρχικά να σκεφτούμε τα δεδομένα (υπόθεση) της άσκησης:

$$0<\alpha<\beta$$

Αυτό σημαίνει τα παρακάτω:

$$\alpha>0,\ \beta>0 \text{ και } \alpha<\beta$$

Αρχίζουμε με την αληθής από την υπόθεση πρόταση:

$$\alpha<\beta \Leftrightarrow$$

πολλαπλασιάζουμε και στα δύο μέλη την θετική ποσότητα $\frac{1}{\beta}>0$, αφού $1>0$ και $\beta>0$ και έχουμε:

$$\alpha\cdot\frac{1}{\beta} < \beta\cdot\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta}<1 \quad \underline{\text{σχέση I}}$$

Με αντίστοιχο τρόπο αρχίζοντας από την σχέση α<β και πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{\alpha}>0$ καταλήγουμε στην σχέση

$$\frac{\beta}{\alpha}>1 \quad \underline{\text{σχέση II}}$$

Από τις σχέσεις I και II έχουμε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta}<1<\frac{\beta}{\alpha}$$

Για την δεύτερη περίπτωση (ii) πρέπει αρχικά να σκεφτούμε ότι για να υπολογίσουμε πόσο κοντά είναι δύο αριθμοί πρέπει να υπολογίσουμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους. Βλέπε 76.

Αρχικά θέλουμε να υπολογίσουμε πόσο κοντά είναι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ στον αριθμό 1. Αυτό το εκφράζει η ποσότητα:

$$\left|1-\frac{\alpha}{\beta}\right|$$

Όμοια θέλουμε να υπολογίσουμε πόσο κοντά είναι ο αριθμός $\frac{\beta}{\alpha}$ με τον αριθμό 1. Δηλαδή:

$$\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

Στην εκφώνηση μας ζητείται να αποδείξουμε ότι η πρόταση είναι αληθής:

«ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ό,τι ο αριθμός $\frac{\beta}{\alpha}$ »

Αυτή η πρόταση με την χρήση συμβόλων γράφεται:

$$\left|1-\frac{\alpha}{\beta}\right|<\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right| \Leftrightarrow$$

λόγω των σχέσεων I και II από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι: $1-\frac{\alpha}{\beta}>0$ και $1-\frac{\beta}{\alpha}<0$ και η ανισότητα απλοποιηταί ως εξής:

$$1-\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\beta}{\alpha}-1\Leftrightarrow$$

πολλαπλασιάζω τώρα με την θετική ποσότητα $\alpha\beta>0$ και τα δύο μέλη:

$$\alpha\beta-\alpha\beta\frac{\alpha}{\beta}<\alpha\beta\frac{\beta}{\alpha}-\alpha\beta\Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta-\alpha^2<\beta^2-\alpha\beta\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2>0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)^2>0$$

Η τελευταία ανισότητα είναι πάντα αληθής λόγω της 56 και λόγω της υπόθεσης έχουμε ότι $\alpha\neq\beta$ ή $(\alpha-\beta)\neq 0$ ή $(\alpha-\beta)^2\neq 0$.

Επομένως θα είναι αληθής και η πρώτη ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

Α37 (Άσκηση Β5 σελ. 68) Αν $|x-2|<0{,}1$ και $|y-4|<0{,}2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων (βλέπε τα σχήματα στο σχολικό βιβλίο στην σελίδα 68).

Λύση:

Αρχικά αναλύουμε τις σχέσεις που μας δίνονται στην εκφώνηση σύμφωνα με τους τύπους 79, 80:

$$|x-2|<0{,}1 \quad \Leftrightarrow 1{,}9<x<2{,}1 \ \text{ σχέση I}$$

$$|y-4|<0{,}2 \quad \Leftrightarrow 3{,}8<y<4{,}2 \ \text{ σχέση II}$$

Στην πρώτη περίπτωση όπου έχουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο με ίσες πλευρές y, y και βάση x έχουμε περίμετρο ίση με $\Pi=x+2y$.

Επομένως πολλαπλασιάζω την σχέση II με τον θετικό αριθμό 2:

$$3{,}8<y<4{,}2 \quad \Leftrightarrow 7{,}6<2y<8{,}4 \ \text{ σχέση III}$$

και τώρα προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις I και III:

$$9{,}5<x+2y<10{,}5\Leftrightarrow 9{,}5<\Pi<10{,}5$$

Στην δεύτερη περίπτωση που έχουμε ένα κυρτό πολύγωνο με πλευρές $2x$, y , x , x , y έχουμε περίμετρο ίση με $\Pi=4x+2y$.

Εργαζόμαστε αναλόγως με την πρώτη περίπτωση και βρίσκουμε

$$15{,}2<\Pi<16{,}8$$

Σας αφήνω να κάνετε τις πράξεις μόνοι σας ως εφαρμογή.

Όμοια εργαζόμαστε και στην τρίτη περίπτωση όπου έχουμε έναν κύκλο με ακτίνα x. Η περίμετρος είναι $\Pi=2\pi x$

Επομένως εδώ αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την σχέση I με τον θετικό αριθμό 2π :

$$1{,}9<x<2{,}1 \quad \Leftrightarrow 3{,}8\pi<2\pi x<4{,}2\pi$$

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, αν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α (85)

Καταρχάς μη αρνητικός αριθμός είναι αυτός που μπορεί να είναι μηδέν ή θετικός.

Επίσης για να υπολογίσουμε μία τετραγωνική ρίζα κάνουμε τον επόμενο συλλογισμό:

Αν $\alpha\geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2=\alpha$. (86)

Δηλαδή, π.χ. για να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα του 9 αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$x^2=9\Leftrightarrow x=3 \acute{\eta}\, x=-3$$

και από τις δύο λύσεις που βρήκαμε πρέπει να πάρουμε την μη αρνητική, δηλαδή

$$x=3 \ \text{ ή } \ \sqrt{9}=3$$

Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος και σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό δεν θα κληθούμε να υπολογίσουμε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών, π.χ. δεν θα μάθουμε πως υπολογίζεται η $\sqrt{(-2)}$ στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Σύμφωνα λοιπόν με αυτόν τον ορισμό για τον υπολογισμό των ριζών:

(i) Ως υπόριζη ποσότητα πρέπει να βάλουμε έναν μη αρνητικό αριθμό και

(ii) Το αποτέλεσμα που υπολογίζουμε πρέπει να είναι ένα και μη αρνητικό.

Η περίπτωση $\sqrt{\alpha^2}$ για $\alpha<0$ δεν έρχεται σε αντίθεση με αυτόν τον ορισμό, διότι η υπόριζη ποσότητα εξακολουθεί να είναι μη αρνητική, αφού $\alpha^2\ge 0$ για κάθε α

Με όμοιο τρόπο στα πλαίσια του σχολικού βιβλίου ορίζεται και η ν-ιοστή ρίζα, δηλαδή:

Η **ν-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν τον υψώσουμε στην ν, δίνει τον α. (87)

Όπως και πριν πρέπει να υπολογίσουμε τον παρακάτω συλλογισμό:

Αν $\alpha\ge 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$ (88)

π.χ. για να υπολογίσουμε την $\sqrt[3]{8}$ αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $x^3=8$ η οποία έχει την λύση $x=2$

προφανώς υπάρχουν και οι ρίζες αρνητικών αριθμών αλλά στα πλαίσια αυτής της τάξης δεν θα μάθουμε να τις υπολογίσουμε.

Με τους παρακάτω τύπους μπορούμε να **απλοποιούμε τις ρίζες**:

Αν $\alpha\ge 0$, τότε $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu=\alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha$ (89)

Αν $\alpha<0$ και ν άρτιος τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$ (90)

Δεν θα ασχοληθούμε με τις ρίζες της μορφής $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$ με $\alpha<0$ και α περιττός, αφού σε αυτή την περίπτωση η υπόριζη ποσότητα είναι αρνητική.

Δηλαδή σε πρώτη φάση θα πρέπει να προσέχεται αν έχουμε θετικό ή αρνητικό αριθμό και δεύτερον αν η δύναμη είναι έξω από την ρίζα ή μέσα στην ρίζα.

Ορίστε μερικά παραδείγματα:

Σαν πρώτη περίπτωση βλέπουμε ότι ο αριθμός που είναι κάτω από την ρίζα είναι θετικός, επομένως απλά απλοποιούμε χωρίς πρόβλημα.

$$\sqrt{5^2}=5 \quad \text{και} \quad (\sqrt{5})^2=5$$

Ακόμα

$$\sqrt[3]{2^3}=2 \quad \text{και} \quad (\sqrt[3]{2})^3=2$$

και τέλος

$$\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$$

Ενώ δεν θα ασχοληθούμε με ρίζες της μορφής:

$\sqrt{-4}$, $(\sqrt{-4})^2$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{(-2)^3}$, $(\sqrt[3]{-2})^3$, διότι έχουν αρνητικές υπόριζες ποσότητες.

Παρακάτω δίνουμε τις **ιδιότητες των ριζών**:

(1) Αν $\alpha,\beta\ge 0$, τότε: $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$ (91)

Για να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα ξεκινάμε από την πρόταση της οποίας της ορθότητα ακόμα δεν γνωρίζουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta} \quad \Leftrightarrow$$

υψώνουμε στην νιοστή δύναμη 66, λάβετε υπόψιν σας ότι οι ρίζες είναι πάντα θετικές ή μηδέν και ο αριθμός $\nu>0$, επομένως:

$$(\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta})^\nu=(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta})^\nu \quad \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu\cdot(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu=(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta})^\nu \quad \Leftrightarrow$$

και απλοποιούμε σύμφωνα με την 89, αφού τα $\alpha,\beta\ge 0$:

$$\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta$$

που προφανώς ισχύει, επομένως θα ισχύει και η πρώτη πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε μίας και όλες οι προτάσεις συνδέονται με ισοδυναμίες.

(2) Αν $\alpha,\beta\ge 0$, τότε: $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (92)

η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με την (1)

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η λύση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$ για $\alpha\ge 0$ που συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα:

$x^\nu=\alpha$	$\alpha\ge 0$
ν άρτιος	$x=\pm\sqrt[\nu]{\alpha}$
ν περιττός	$x=\sqrt[\nu]{\alpha}$

Τέλος να τονίζουμε ότι το ν είναι ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1, $\nu\in\{1,2,3,\dots\}$

Στην συνέχεια θα ορίσουμε τις **δυνάμεις με ρητό εκθέτη**

Αν $\alpha>0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

και εάν μ,ν θετικοί ακέραιοι τότε $0^{\frac{\mu}{\nu}}=0$

Για παράδειγμα:

$$27^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{27^{-4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27^4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27^4}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{3^3})^4}=\frac{1}{3^4}$$

Ακόμα:

$$27^{-\frac{4}{3}}=(3^3)^{-\frac{4}{3}}=3^{\frac{-3\cdot 4}{3}}=3^{-4}=\frac{1}{3^4}$$

Επίσης:

$$\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{a^7}$$

Ακόμα αν α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί ισχύει η σχέση:

$\alpha<\beta\Leftrightarrow\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}$ (93)

που αποδεικνύεται ως εξής:

$\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}\Leftrightarrow(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu<(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu\Leftrightarrow\alpha<\beta$ που ισχύει.

Εδώ πρέπει να καταλάβετε ότι αυτή η απόδειξη έχει δύο σκέλη:

(1) Αν γνωρίζουμε ότι $\alpha<\beta$ τότε πρέπει να δείξουμε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}$, πράγματι:

Η σχέση α<β γράφετε $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu<(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu$ αφού σύμφωνα με την 89 είναι $\alpha=(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu$ και $\beta=(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu$.

Ύστερα σύμφωνα με την σχέση 65 έχουμε ότι η σχέση $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu<(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu$ γράφετε: $\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}$.

(2) Με παρόμοιο συλλογισμό αν γνωρίζουμε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}$ μπορούμε να δείξουμε ότι $\alpha<\beta$

Δηλαδή αποδείξαμε και τις δύο κατευθύνσεις (ισοδυναμία).

Α38 (Άσκηση Α1 σελ. 74) Να υπολογίσετε τις ρίζες:

(i) $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[5]{100000}$

(ii) $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{32}$

(iii) $\sqrt{0.01}$, $\sqrt[3]{0.001}$, $\sqrt[4]{0.0001}$, $\sqrt[5]{0.00001}$

Λύση:

(i) Για να βρούμε την $\sqrt{100}$, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $x^2=100$, η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες τις -10 και 10. Κρατάμε την θετική δηλαδή: $\sqrt{100}=10$, βλέπε 85 και 86.

Όμοια η $\sqrt[3]{1000}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^3=1000$, (εξάλλου αυτή η εξίσωση δεν έχει αρνητικές ρίζες), δηλαδή $\sqrt[3]{1000}=10$, βλέπε 87 και 88.

Όμοια έχουμε $\sqrt[4]{10000}=10$ και $\sqrt[5]{100000}=10$

(ii) με τον ίδιο τρόπο έχουμε: $\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[4]{16}=2$, $\sqrt[5]{32}=2$.

(iii) με τον ίδιο τρόπο έχουμε $\sqrt{0.01}=\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{1}{10}$ και $\sqrt[3]{0.001}=\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}=\frac{1}{10}$, $\sqrt[4]{0.0001}=\sqrt[4]{\frac{1}{10000}}=\frac{1}{10}$ και τέλος $\sqrt[5]{0.00001}=\sqrt[5]{\frac{1}{100000}}=\frac{1}{10}$.

Α39 (Άσκηση Α2 σελ. 74) Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά:

(i) $\sqrt{(\pi-4)^2}$ (ii) $\sqrt{(-20)^2}$

(iii) $\sqrt{(x-1)^2}$ (iv) $\sqrt{\frac{x^2}{4}}$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι είναι όλες τετραγωνικές ρίζες και έτσι θα εκμεταλλευτούμε την ιδιότητα: 90.

(i) $\sqrt{(\pi-4)^2}=|\pi-4|=-(\pi-4)=4-\pi$, εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι $\pi-4<0$, αφού $\pi=3.14\ldots$.

(ii) Όμοια: $\sqrt{(-20)^2}=|-20|=20$

(iii) Με παρόμοιο τρόπο είναι:

$$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=\begin{cases} x-1, x\geq 1 \\ -x+1, x<0 \end{cases}$$

Εδώ εξετάσαμε και τις δύο περιπτώσεις, δηλαδή όταν το $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ και $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$ αφού δεν γνωρίζουμε ακριβώς ποια τιμή έχει το x. Σε αντιπαράθεση στις (i) και (ii) γνωρίζαμε το πρόσημο της υπόριζης ποσότητας.

(iv) Με παρόμοιο τρόπο:

$$\sqrt{\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\left|\frac{x}{2}\right|=\begin{cases} \frac{x}{2}, x\geq 0 \\ -\frac{x}{2}, x<0 \end{cases}$$

Εξετάσαμε δύο περιπτώσεις πρώτον για $\frac{x}{2}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$ και δεύτερον για $\frac{x}{2}<0 \Leftrightarrow x<0$.

Α40 (Άσκηση Α3 σελ. 74) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=1$$

Λύση:

Θα αρχίσουμε φυσικά από το πρώτο μέλος με σκοπό να κάνουμε τις πράξεις και να προκύψει το δεύτερο μέλος.

Αρχικά θα εκμεταλλευτούμε την ιδιότητα 90 για να απλοποιήσουμε τα ριζικά.

$$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=|2-\sqrt{5}|+|3-\sqrt{5}|$$

Τώρα παρατηρούμε ότι $2-\sqrt{5}<0$ και $3-\sqrt{5}>0$ αφού με ένα πρόχειρο υπολογισμό είναι $3>\sqrt{5}>2$. Επομένως:

$$|2-\sqrt{5}|+|3-\sqrt{5}|=-(2-\sqrt{5})+3-\sqrt{5}=$$
$$=-2+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=1$$

Α41 (Άσκηση Α4 σελ. 74) Να αποδείξετε ότι:

$$(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3})\cdot(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3})=-8$$

Λύση:

Θα αρχίσουμε με τις πράξεις στο πρώτο μέλος. Παρατηρούμε ότι έχουμε την “διαφορά τετραγώνων”, επομένως:

$$(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3})\cdot(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}) =$$
$$(\sqrt{x-5})^2-(\sqrt{x+3})^2 =$$
$$|x-5|-|x+3|$$

Τώρα επειδή δεν γνωρίζουμε τα πρόσημα μέσα στις απόλυτες τιμές πρέπει να εξετάσουμε διάφορες περιπτώσεις:

(1) Για $x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5$ και $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$ που αυτό σημαίνει: $x\geq 5$, έχουμε:

$$|x-5|-|x+3|=x-5-(x+3)=x-5-x-3=-8$$

(2) Για $x-5<0 \Leftrightarrow x<5$ και $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$ που αυτό σημαίνει: $x<-3$, έχουμε:

$$|x-5|-|x+3|=-(x-5)+(x+3)=-x+5+x+3=8$$

(3) Και τέλος για $-3\leq x<5$ είναι

$$|x-5|-|x+3|=-(x-5)-(x+3)=-x+5-x-3=$$
$$=-2x+2=-2(x-1)$$

Πρέπει σε αυτό το σημείο να προσθέσουμε ότι για να ισχύει η παράσταση:

$$(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3})\cdot(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3})=-8$$

πρέπει επιπλέον να ισχύει $x\geq 5$.

Α42 (Άσκηση Α5 σελ. 74) Να αποδείξετε ότι:

(i) $(\sqrt{8}-\sqrt{18})\cdot(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32})=-14$

(ii) $(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32})\cdot(\sqrt{63}-\sqrt{32})=31$

Λύση:

Σε κάθε ερώτημα θα πρέπει να απλοποιήσουμε κάπως τις ρίζες. Αυτό θα γίνει ως εξής: Αν έχουμε την $\sqrt{8}$ θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε το 8 ως γινόμενο δύο αριθμών που ο ένας εξ αυτών να είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή:

$$\sqrt{8}=\sqrt{(4\cdot 2)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2}$$

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε:

$$\sqrt{18}=\sqrt{(9\cdot 2)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50}=\sqrt{(25\cdot 2)}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72}=\sqrt{(36\cdot 2)}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32}=\sqrt{(16\cdot 2)}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}$$

και ακόμα:

$$\sqrt{28}=\sqrt{(4\cdot 7)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=2\cdot\sqrt{7}$$

$$\sqrt{63}=\sqrt{(9\cdot 7)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}=3\cdot\sqrt{7}$$

Επομένως για το (i) ερώτημα έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{8}-\sqrt{18})\cdot(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}) &=\\
(2\sqrt{2}-3\sqrt{2})(5\sqrt{2}+6\sqrt{3}-4\sqrt{2}) &=\\
-\sqrt{2}\cdot 7\cdot\sqrt{2} &=\\
-7\cdot(\sqrt{2})^2 &=\\
-7\cdot 2 &=\\
14 &
\end{aligned}$$

Και με ίδιο τρόπο, για το ερώτημα (ii) έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32})\cdot(\sqrt{63}-\sqrt{32}) &=\\
(2\sqrt{7}+\sqrt{7}+4\sqrt{2})(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}) &=\\
(3\sqrt{7}+4\sqrt{2})(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}) &=\\
(3\sqrt{7})^2-(4\sqrt{2})^2 &=\\
9\cdot 7-16\cdot 2 &=\\
63-32 &=\\
31 &
\end{aligned}$$

A43 (Άσκηση A6 σελ. 74) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}=2$

(ii) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=2$

Λύση:

Εδώ θα εκμεταλλευτούμε την ιδιότητα 91 και την ταυτότητα: "διαφορά τετραγώνων". Επομένως για το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}} &=\\
\sqrt{2\cdot(2-\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2})} &=\\
\sqrt{2\cdot(2^2-(\sqrt{2})^2)} &=\\
\sqrt{2\cdot(4-2)} &=\\
\sqrt{4} &=\\
2 &
\end{aligned}$$

Και με παρόμοιο τρόπο για το δεύτερο ερώτημα:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}} &=\\
\sqrt[3]{2\cdot(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})} &=\\
\sqrt[3]{2\cdot(3^2-(\sqrt{5})^2)} &=\\
\sqrt[3]{2\cdot(9-5)} &=\\
\sqrt[3]{8} &=\\
2 &
\end{aligned}$$

A44 (Άσκηση A7 σελ. 74) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$

(ii) $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$

Λύση:

Ο λογισμός θα διευκολυνθεί αν αναλύσουμε της ρίζες ως δυνάμεις με ρητούς εκθέτες:

Για το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\left(\left(2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{4}{12}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$$

Και για το δεύτερο ερώτημα αντίστοιχα:

$$\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\left(2\cdot\left(2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(2\cdot\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(2\cdot 2^{\frac{4}{6}}\right)^{\frac{1}{5}}=$$
$$=\left(2^{\frac{10}{6}}\right)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{10}{30}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$$

A45 (Άσκηση A8 σελ. 74) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=3\cdot\sqrt[12]{3}$

(ii) $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2\cdot\sqrt[18]{2^{13}}$

(iii) $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}=25\cdot\sqrt{5}$

Λύση:

Ο λογισμός θα διευκολυνθεί αν αναλύσουμε της ρίζες ως δυνάμεις με ρητούς εκθέτες:

Για το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=3^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{13}{12}}=3^{\frac{1\cdot 12+1}{12}}=3^{1+\frac{1}{12}}=3\cdot 3^{\frac{1}{12}}=3\sqrt[12]{3}$$

Παρατηρήστε την Ευκλείδεια διαίρεση $13:12=1\cdot 12+1$ για να επιτευχθεί η απλοποίηση.

Και για το δεύτερο ερώτημα αντίστοιχα:

$$\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2^{\frac{8}{9}}\cdot 2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{31}{18}}=2^{\frac{1\cdot 18+13}{18}}=2^{1+\frac{13}{18}}=2\cdot 2^{\frac{13}{18}}=$$
$$=2\sqrt[18]{2^{13}}$$

Τέλος για το τρίτο ερώτημα εργαζόμαστε αντίστοιχα:

$$\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}=5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{6}}=5^{\frac{15}{6}}=5^{\frac{2\cdot 6+3}{6}}=5^2\cdot 5^{\frac{3}{6}}=$$
$$=25\cdot 5^{\frac{1}{2}}=25\sqrt{5}$$

A46 (Άσκηση A9 σελ. 74) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\dfrac{25\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{75}}=10$ (ii) $\dfrac{\sqrt{216}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{50}}=18$

Λύση:

Θα χρειαστεί να αναλύσουμε τις υπόριζες ποσότητες σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

12	:2	75	:3	216	:2	50	:2
6	:2	25	:5	108	:2	25	:5
3	:3	5	:5	54	:2	5	:5
1		1		27	:3	1	
				9	:3		
				3	:3		
				1			

Επομένως:

$12=2^2\cdot3$, $75=3\cdot5^2$, $216=2^3\cdot3^3$, $50=2\cdot5^2$

Επομένως για το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$\frac{25\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{75}}=\frac{25\cdot\sqrt{2^2\cdot3}}{\sqrt{3\cdot5^2}}=\frac{25\cdot2\cdot\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt{3}}=10$$

Και για το δεύτερο ερώτημα έχουμε:

$$\frac{\sqrt{216}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2^3\cdot3^3}\cdot\sqrt{3\cdot5^2}}{\sqrt{2\cdot5^2}}=\sqrt{\frac{2^3\cdot3^3\cdot3\cdot5^2}{2\cdot5^2}}=$$

$$=\sqrt{2^2 3^4}=2\cdot3^2=18$$

A47 (Άσκηση Α10 σελ. 75) Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές:

(i) $\frac{4}{5-\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

Λύση:

(i) Η συζυγή παράσταση είναι αυτή που συμπληρώνει την ταυτότητα “διαφορά τετραγώνου”, π.χ. η συζυγή παράσταση του $5-\sqrt{3}$ είναι η $5+\sqrt{3}$, γιατί $(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})=5^2-(\sqrt{3})^2$.

Για να φύγουν τα ριζικά από τον παρανομαστή ώστε οι παραστάσεις να μετατραπούν σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με την συζυγή παράσταση του παρανομαστή.

Επομένως:

$$\frac{4}{5-\sqrt{3}} = \frac{4(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}=\frac{4(5+\sqrt{3})}{5^2-(\sqrt{3})^2}=$$

$$= \frac{4(5+\sqrt{3})}{22}=\frac{2(5+\sqrt{3})}{11}=$$

$$= \frac{10+2\sqrt{3}}{11}$$

(ii) Εργαζόμαστε αναλόγως:

$$\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{8(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=$$

$$= \frac{8(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5}=$$

$$= 4(\sqrt{7}-\sqrt{5})$$

(ii) Εργαζόμαστε αναλόγως:

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}=$$

$$= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{6})^2}{7-6}=$$

$$= (\sqrt{7})^2+2\sqrt{7}\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2=$$

$$= 13+2\sqrt{42}$$

A48 (Άσκηση Α11 σελ. 75) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\frac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}=\sqrt{32}}=16$ (ii) $\sqrt{\frac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^6}}=3$

Λύση:

(i) Θα χρειαστεί να αναλύσουμε τις υπόριζες ποσότητες σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

162	:2	98	:2	32	:2	50	:2
81	:3	49	:7	16	:2	25	:5
27	:3	7	:7	8	:2	5	:5
9	:3	1		4	:2	1	
3	:3			2	:2		
1				1			

Δηλαδή:

$162=2\cdot3^4$, $98=2\cdot7^2$, $32=2^5$, $50=2\cdot5^2$

Επομένως:

$$\frac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}}=\frac{\sqrt{2\cdot3^4}+\sqrt{2\cdot7^2}}{\sqrt{2\cdot5^2}-\sqrt{2^5}}=\frac{3^2\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-2^2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=16$$

(ii) Παρατηρήστε ότι:

$9^{12}+3^{20}=(3^2)^{12}+3^{20}=3^{24}+3^{20}=3^{20}(3^4+1)=3^{20}\cdot82$

$9^{11}+27^6=3^{22}+3^{18}=3^{18}(3^4+1)=3^{18}\cdot82$

Επομένως:

$$\sqrt{\frac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^6}}=\sqrt{\frac{3^{20}\cdot82}{3^{18}\cdot82}}=\sqrt{3^2}=3$$

A49 (Άσκηση Β1 σελ. 75) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5+\sqrt{6}$

(ii) Αν $\alpha,\beta>0$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=(\alpha+\beta)+\sqrt{\alpha\beta}$$

Λύση:

Και στις δύο περιπτώσεις θα πολλαπλασιάσουμε με την συζυγή παράσταση του παρανομαστή.

(i) Η συζυγή παράσταση είναι: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, επομένως:

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\\ &= \frac{3\sqrt{9}+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}-2\sqrt{4}}{3-2}=\\ &= 9+\sqrt{6}-4=\\ &= 5+\sqrt{6}\end{aligned}$$

(ii) Το πρόβλημα είναι ακριβώς ίδιο, μόνο που στην θέση των αριθμών έχουμε μεταβλητές:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} &= \frac{(\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}=\\ &= \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2}+\alpha\sqrt{\alpha\beta}-\beta\sqrt{\alpha\beta}-\beta\sqrt{\beta^2}}{\alpha-\beta}=\\ &= \frac{\alpha^2-\beta^2+(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha-\beta}=\\ &= \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha-\beta}=\\ &= \frac{(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)+\sqrt{\alpha\beta}]}{\alpha-\beta}=\\ &= (\alpha+\beta)+\sqrt{\alpha\beta}\end{aligned}$$

Η προϋπόθεση α,β>0 πρέπει να ισχύει ώστε να ορίζονται τα ριζικά. Πρέπει οι υπόριζες ποσότητες να είναι μη αρνητικές.

Επιπλέον πρέπει προφανώς $\alpha\neq\beta$ ώστε να μην μηδενίζεται ο παρανομαστής.

A50 (Άσκηση Β2 σελ. 75)

(i) Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

$(3+2\sqrt{7})^2$ και $(3-2\sqrt{7})^2$

(ii) Να αποδείξετε ότι:

$\sqrt{37+12\sqrt{7}}-\sqrt{37-12\sqrt{7}}=6$

Λύση:

(i) Το πρώτο ερώτημα είναι τετριμμένο. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα “τετράγωνο αθροίσματος”.

$(3+2\sqrt{7})^2=9+2\cdot3\cdot2\sqrt{7}+(2\sqrt{7})^2=37+12\sqrt{7}$

και

$(3-2\sqrt{7})^2=9-2\cdot3\cdot2\sqrt{7}+(2\sqrt{7})^2=37-12\sqrt{7}$

(ii) Με την βοήθεια των παραπάνω κάνουμε τον εξής λογισμό:

$$\begin{aligned}\sqrt{37+12\sqrt{7}}-\sqrt{37-12\sqrt{7}} &=\\ \sqrt{(3+\sqrt{7})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{7})^2} &=\\ |3+\sqrt{7}|+|3-\sqrt{7}| &=\\ 3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7} &=\\ 6\end{aligned}$$

A51 (Άσκηση Β3 σελ. 75)

(i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$ είναι ρητός.

(ii) Αν α θετικός ρητός, να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ είναι ρητός.

Λύση:

Ρητός είναι κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί με την μορφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$ με μ,ν ακέραιοι και $\nu\neq0$.

Επομένως θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τους παραπάνω αριθμούς με την μορφή κλάσματος.

(i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 &= \frac{2}{3}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}=\\ &= \frac{2}{3}+2+\frac{3}{2}=\\ &= \frac{4}{6}+\frac{12}{6}+\frac{9}{6}=\\ &= \frac{25}{6}\end{aligned}$$

που είναι ρητός αριθμός.

(ii) Με όμοιο τρόπο έχουμε:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 &= \alpha+2\sqrt{\alpha}\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}=\\ &= a+2+\frac{1}{a}=\\ &= \frac{a^2}{a}+\frac{2a}{a}+\frac{1}{a}=\\ &= \frac{a^2+2a+1}{a}=\\ &= \frac{(a+1)^2}{a}\end{aligned}$$

Ας δεχτούμε χωρίς απόδειξη ότι το άθροισμα και το γινόμενο δύο ακεραίων αριθμών είναι ακέραιος αριθμός. Δηλαδή:

Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ τότε $(\alpha+\beta)\in\mathbb{Z}$ και $(\alpha\cdot\beta)\in\mathbb{Z}$

Προσοχή! Η διαφορά δύο ακεραίων είναι επίσης ακέραιος, όμως το πηλίκο δυο ακεραίων μπορεί να μην είναι ακέραιος.

Ρητός είναι κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί με την μορφή κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\beta\neq0$.

Το άθροισμα ή η διαφορά δύο ρητών είναι ρητός διότι αν $\frac{\alpha}{\beta},\frac{\gamma}{\delta}\in\mathbb{Q}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta\pm\beta\gamma}{\beta\delta}$ που είναι ρητός αφού τα $\alpha\delta\pm\beta\gamma$ και $\beta\delta$ είναι ακέραιοι ως άθροισμα και γινόμενο ακεραίων

Το γινόμενο δύο ρητών είναι επίσης ρητός αφού $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ που είναι ρητός για τον ίδιο λόγο.

Το πηλίκο δύο ρητών είναι ρητός αφού $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$ είναι επίσης ρητός για τον ίδιο λόγο.

Επομένως το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο δύο ρητών είναι επίσης ρητός αριθμός. (94)

Μετά από αυτή την παρένθεση ας επανέρθουμε τώρα στην άσκηση

Αφού ο α είναι ρητός αριθμός θα είναι και ο $\frac{(a+1)^2}{a}$ ρητός διότι:

Ο $\alpha+1$ είναι ρητός ως άθροισμα ρητών

Ο $(\alpha+1)^2=(\alpha+1)(\alpha+1)$ είναι ρητός ως γινόμενο ρητών και

ο $(\alpha+1)^2\cdot\frac{1}{\alpha}$ είναι και αυτός ρητός ως πηλίκο ρητών.

Α52 (Άσκηση Β4 σελ. 75) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4$

(ii) $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}=8\sqrt{3}$

Λύση:

(i) Θα χρησιμοποιήσουμε τις συζυγείς παραστάσεις των παρανομαστών.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \\
\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}+\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} &= \\
\frac{\sqrt{15}+3+5-\sqrt{15}}{2} &= \\
\frac{8}{2} &= \\
4 &
\end{aligned}$$

(ii) Όμοια

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} &= \\
\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})^2}-\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^2} &= \\
\frac{4+4\sqrt{3}+3-(4-4\sqrt{3}+3)}{[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^2} &= \\
\frac{8\sqrt{3}}{(2-3)^2} &= \\
8\sqrt{3} &
\end{aligned}$$

Α53 (Άσκηση Β5 σελ. 75) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές του είναι $AB=\sqrt{\alpha}$ και $A\Gamma=\sqrt{\beta}$.

(i) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.

(ii) Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

iii) Για μη αρνητικούς αριθμούς α και β, να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha\beta}\leq\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση:

(i) Θα υπολογίσουμε την υποτείνουσα από το πυθαγόρειο θεώρημα:

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών. (95)

Επομένως:

$$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta\,,$$

δηλαδή:

$$B\Gamma=\sqrt{\alpha+\beta}$$

(ii) Για να λύσουμε αυτό το ερώτημα θα χρειαστεί η τριγωνική ανισότητα όπως αυτή διατυπώνεται στην Ευκλείδεια γεωμετρία.

Αρχικά ας διατυπώσουμε την τριγωνική ανισότητα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία χωρίς απόδειξη:

Κάθε πλευρά σε τρίγωνο είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από την διαφορά τους. (96)

Ενώ στην μαθηματική ανάλυση, για δύο πραγματικούς αριθμούς x, y η τριγωνική ανισότητα γράφεται:

$$\big||x|-|y|\big|\leq|x+y|\leq|x|+|y| \qquad (97)$$

Επομένως, στο τρίγωνο ΑΒΓ σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα η πλευρά ΒΓ θα είναι μικρότερη από το άθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, δηλαδή:

$$B\Gamma<AB+A\Gamma \text{ ή } \sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$$

(iii) Αρχίζοντας με την σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε και με διαδοχικές ισοδυναμίες έχουμε:

$$\begin{array}{lrl}
1 & \sqrt{\alpha+\beta}\leq\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} & \Leftrightarrow \\
2 & (\sqrt{\alpha+\beta})^2\leq(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 & \Leftrightarrow \\
3 & |\alpha+\beta|\leq\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta & \Leftrightarrow \\
4 & \alpha+\beta\leq\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta & \Leftrightarrow \\
5 & 0\leq2\sqrt{\alpha\beta} & \Leftrightarrow \\
6 & 0\leq\sqrt{\alpha\beta} &
\end{array}$$

Η σχέση στην γραμμή 6 είναι αληθής από τον ορισμό των ριζικών που επιβάλει ότι όλες οι ριζικές ποσότητες είναι θετικές, βλέπε 85, επομένως θα είναι αληθής και η πρώτη.

Στην γραμμή 2 υψώσαμε στο τετράγωνο και στις δύο πλευρές σύμφωνα με την 66.

Στην γραμμή 4 είναι $|\alpha+\beta|=\alpha+\beta$ αφού τα α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί αφού στα $\sqrt{\alpha}$ και $\sqrt{\beta}$ στα αρχικά μήκη πλευρών οι υπόριζες ποσότητες είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

Τέλος η ισότητα ισχύει όταν:

$\sqrt{\alpha\beta}=0$ ή $\alpha\beta=0$ δηλαδή όταν $\{\alpha=0 \, ή \, \beta=0\}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

A54 (Άσκηση Γ1 σελ. 76) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ και δ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

(1) “ $(\alpha=\beta \, και \, \gamma=\delta) \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$ ” Η πρόταση είναι ψευδής, διότι ενώ είναι αληθές το ορθό δεν ισχύει το αντίστροφο. Σαν αντιπαράδειγμα του αντιστρόφου έχουμε ότι εάν $2+3=1+4$ δεν ισχύει ότι $(2=1 \, και \, 3=4)$

(2) Αν $\alpha^2=\alpha\beta$, τότε $\alpha=\beta$, Η πρόταση είναι ψευδής διότι εν παραδείγματι δεν ισχύει για $\alpha=0$ και $\beta=1$. Η πρόταση ισχύει για $\alpha\neq0$

(3) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$, Προφανώς ψευδής. Σαν αντιπαράδειγμα για $\alpha=1$ και $\beta=2$ είναι $(1+2)^2\neq1^2+3^2$. Το σωστό είναι $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

(4) “Το άθροισμα δύο άρρητων αριθμών είναι επίσης άρρητος αριθμός.” Η πρόταση είναι ψευδής αφού μπορούμε να φέρουμε το εξής αντιπαράδειγμα: Αν $\alpha=\sqrt{2}$ και $\beta=-\sqrt{2}$ τότε $\alpha+\beta=0=\frac{0}{1}$ που είναι ρητός.

(5) “Το γινόμενο δύο άρρητων αριθμών είναι επίσης άρρητος αριθμός”. Η πρόταση είναι ψευδής αφού μπορούμε να φέρουμε το εξής αντιπαράδειγμα: Αν $\alpha=\sqrt{2}$ και $\beta=-\sqrt{2}$ τότε $\alpha\beta=-2=\frac{-2}{1}$ που είναι ρητός.

(6) “Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma<\delta$, τότε $\alpha-\gamma>\beta-\delta$ ”. Η πρόταση είναι αληθής, διότι $\gamma<\delta\Leftrightarrow-\gamma>-\delta$ και όταν προσθέσω κατά μέλη έχω $\alpha+(-\gamma)>\beta+(-\delta)$, δηλαδή $\alpha-\gamma>\beta-\delta$.

(7) “ $\alpha^2>\alpha\beta$, τότε $\alpha>\beta$ ”. Η πρόταση είναι ψευδής διότι ισχύει για $\alpha>0$ και $\alpha\beta>0$, π.χ. για $\alpha=-2$ και $\beta=-1$ είναι: “ $(-2)^2>(-1)\cdot(-2)$, τότε $-2>-1$ ”.

(8) “Αν $\frac{\alpha}{\beta}>1$, τότε $\alpha>\beta$ ”. Είναι ψευδής διότι π.χ. για α=-2 και β=-1 έχουμε “ $\frac{-2}{-1}>1$, τότε $-2>-1$ ”. Η πρόταση είναι αληθής για $\beta>0$ και $\alpha\beta>0$.

(9) “Αν $\alpha>\beta$ και $\alpha>-\beta$, τότε $\alpha>0$ ”. Η πρόταση είναι αληθής, διότι εάν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο ανισότητες της υπόθεσης έχουμε $\alpha+\alpha>\beta+(-\beta)$ ή $2\alpha>0$ ή $\alpha>0$.

(10) “Αν $\alpha>\frac{1}{\alpha}$, τότε $\alpha>1$ ”. Η πρόταση είναι ψευδής διότι για παράδειγμα δεν ισχύει για $\alpha=-\frac{1}{2}$ αφού: “Αν $-\frac{1}{2}>\frac{1}{-\frac{1}{2}}$, τότε $-\frac{1}{2}>1$ ”.

(11) “Αν $\alpha<\beta<0$, τότε $\alpha^2>\beta^2$ ”. Η πρόταση είναι αληθής, διότι: $\alpha<\beta<0 \Rightarrow -\alpha>-\beta>0 \Rightarrow (-\alpha)^2>(-\beta)^2 \Rightarrow \alpha^2>\beta^2$.

(12) “Αν $\alpha>-2$ και $\beta>-3$, τότε $\alpha\beta>6$ ”. Η πρόταση είναι ψευδής, διότι για παράδειγμα για α=1 και β=3 δεν ισχύει.

(13) “Αν $\alpha<-2$ και $\beta<-3$, τότε $\alpha\beta>6$ ”. Η πρόταση είναι αληθής, διότι: $\alpha<-2 \Leftrightarrow a>2$ και ακόμα $\beta<-3 \Leftrightarrow \beta>3$. Επομένως $\alpha\beta>2\cdot3$

(14) “ $4\alpha^2-20\alpha\beta+25\beta^2\geq0$ ”. Η πρόταση είναι αληθής διότι $4\alpha^2-20\alpha\beta+25\beta^2\geq0 \Leftrightarrow (2\alpha-5\beta)^2\geq0$ που ισχύει πάντα.

(15) “ $(\alpha-1)^2+(\alpha+1)^2>0$ ”. Η πρόταση είναι αληθής διότι δεν υπάρχει α που να πληρεί ταυτόχρονα τις σχέσεις $\alpha-1=0$ και $\alpha+1=0$.

(16) “ $(\alpha^2-1)^2+(\alpha+1)^2>0$ ”. Η πρόταση είναι ψευδής διότι δεν ισχύει για $\alpha=-1$.

(17) “ $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$ ”. Η πρόταση είναι αληθής, διότι είναι $\alpha+\beta=0$ και $\alpha-\beta=0$, δηλαδή $\alpha=\beta=0$.

(18) “ $\alpha\beta\geq0$, τότε $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ ”. Η πρόταση είναι αληθής διότι έχουμε: $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta^2|=(|\alpha|+|\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2=|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta=|\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta\geq0$.

(19) “Αν $\alpha^2=\beta$, τότε $\alpha=\sqrt{\beta}$ ”. Η πρόταση είναι ψευδής, διότι η αρχική εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $\alpha=\pm\sqrt{\beta}$. Η πρόταση θα ήταν αληθής μόνο για $\beta=0$.

(20) “ $\sqrt{\alpha}=\alpha$.” Η πρόταση είναι ψευδής, το σωστό είναι $\sqrt{\alpha}=|\alpha|$.

(21) “Αν $\alpha\geq0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2=\alpha$.” Η πρόταση είναι αληθής από τον ορισμό.

(22) “Αν $\alpha\beta\geq0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$.” Η πρόταση είναι ψευδής διότι το $\alpha\beta\geq0$ δηλώνει ότι τα α και β είναι και τα δύο θετικά ή και τα δύο αρνητικά. Όμως δεν μπορεί στις υπόριζες ποσότητες να έχουμε αρνητικούς αριθμούς.

(23) “Αν $\beta\geq0$, τότε $\sqrt{\alpha^2\cdot\beta}=\alpha\cdot\sqrt{\beta}$.” Η πρόταση είναι ψευδής. Είναι $\sqrt{\alpha^2\cdot\beta}=|\alpha|\cdot\sqrt{\beta}$.

(24) “ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta$ ”. Η πρόταση είναι ψευδής διότι δεν ισχύει π.χ. για α=1 και β=2.

(25) "Αν $\alpha \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[6]{\alpha^3}=\sqrt{\alpha}$." Η πρόταση είναι <u>αληθής</u>. $\alpha^{\frac{3}{6}}=\alpha^{\frac{1}{2}}$.

(26) "Μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[4]{\alpha^2}=\sqrt{\alpha}$." Η πρόταση είναι <u>ψευδής</u>, διότι δεν ισχύει π.χ. για $\alpha=-1$. Σύμφωνα με τον ορισμό δεν ορίζεται η $\sqrt{-1}$. Είναι $\sqrt[4]{\alpha^2}=\sqrt{|\alpha|}$.

(27) "$5^{25}>25^5$." Η πρόταση είναι <u>αληθής</u> διότι $5^{25}>25^5 \Leftrightarrow 5^{25}>5^{10}$.

(28) "$11^{22}>22^{11}$." Η πρόταση είναι <u>αληθής</u> διότι: $11^{22}>22^{11} \Leftrightarrow 11^{22}>(2\cdot 11)^{11} \Leftrightarrow 11^{22}>2^{11}\cdot 11^{11} \Leftrightarrow 11^{11}>2^{11} \Leftrightarrow 11>2$.

A55 (Άσκηση Γ2 σελ. 77) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

(1) Αν $2<x<5$ τότε η παράσταση $|x-2|+|x-5|$ είναι ίση με:

(Α) $2x-7$, **(Β)** $7-2x$, **(Γ)** -3, **(Δ)** 3

Είναι $2<x$ ή $0<x-2$ και x<5 ή $x-5<0$, επομένως $|x-2|+|x-5| = x-2-x+5 = 3$. Σωστή απάντηση είναι η Δ.

(2) Αν $10<x<20$ τότε η τιμή της παράστασης $\frac{|x-10|}{x-10}+\frac{|x-20|}{x-20}$ είναι ίση με:

(Α) 2, **(Β)** -2, **(Γ)** 10, **(Δ)** 0

Είναι $x-10>0$ και $x-20<0$, επομένως: $\frac{|x-10|}{x-10}+\frac{|x-20|}{x-20} = \frac{x-10}{x-10}+\frac{-(x-20)}{x-20} = 1-1 = 0$. Σωστή απάντηση είναι η Δ.

(3) Αν $\alpha=\sqrt[6]{10}$, $\beta=\sqrt{2}$ και $\gamma=\sqrt[3]{3}$ τότε

(Α) $\alpha<\beta<\gamma$, **(Β)** $\alpha<\gamma<\beta$,

(Γ) $\gamma<\alpha<\beta$, **(Δ)** $\beta<\gamma<\alpha$

Είναι $\alpha=\sqrt[6]{10}=10^{\frac{1}{6}}$, $\beta=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$ και $\gamma=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$. Επομένως $\beta<\gamma<\alpha$. Σωστή απάντηση είναι η Δ.

(4) Ο αριθμός $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ είναι ίσος με:

(Α) $3+2\sqrt{5}$, **(Β)** $3+2\sqrt[4]{5}$,

(Γ) $2+\sqrt{5}$, **(Δ)** $2+\sqrt[4]{5}$

Παρατηρούμε ότι:

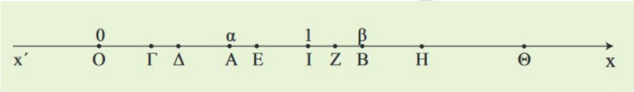
$$(2+\sqrt{5})^2=4+4\sqrt{5}+5=9+4\sqrt{5}$$

Επομένως:

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}=2+\sqrt{5}.$$

Σωστή απάντηση είναι η Γ.

A56 (Άσκηση Γ3 σελ. 77) Στον παρακάτω άξονα τα σημεία Ο, Ι, Α και Β παριστάνουν τους αριθμούς 0, 1, α και β αντίστοιχως, με $0<\alpha<1$ και $\beta>1$, ενώ τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, α^2, β^2, α^3 και β^3, όχι όμως με τη σειρά που αναγράφονται. Να αντιστοιχίσετε τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ με τους αριθμούς που παριστάνουν.



Παρατηρούμε ότι:

- $\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha^3<\alpha^2$ γιατί πολλαπλασιάσαμε με $\alpha^2>0$
- $\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha^2<\alpha$ γιατί πολλαπλασιάσαμε με $\alpha>0$
- $\alpha^2<\alpha \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2}<\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \alpha<\sqrt{\alpha}$
- $\beta>1 \Leftrightarrow \beta^2>\beta \Leftrightarrow \beta^3>\beta^2$
- $\beta^2>\beta \Leftrightarrow \sqrt{\beta^2}<\sqrt{\beta} \Leftrightarrow \beta<\sqrt{\beta}$

Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει:

$$\alpha^3<\alpha^2<\sqrt{\alpha}<\sqrt{\beta}<\beta^2<\beta^3$$