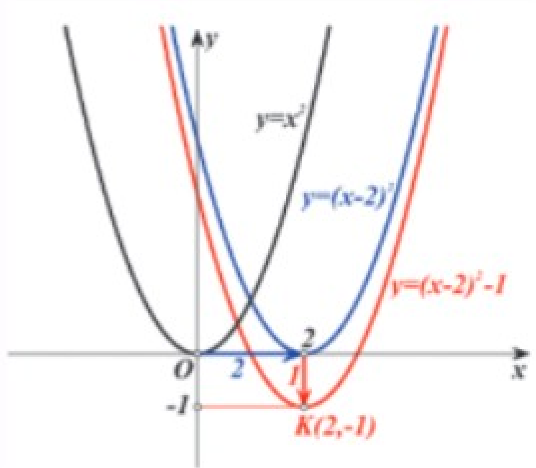
Άλγεβρα Α Λυκείου

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ



Οι Πραγματικοί αριθμοί

Κουμουνδούρος Γιάννης

Εκδόσεις: johnkscience

Πρόλογος

Στις σημειώσεις αυτές θα βρείτε τις λύσεις των ασκήσεων της Τράπεζας Θεμάτων του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής πολιτικής (https://trapeza.iep.edu.gr/public/subjects.php), όπως αυτές διαμορφώθηκαν το σχολικό έτος 2023-2024.

Παρόλο, που τις λύσεις αυτές μπορείτε να τις βρείτε από τον ιστότοτο του ΙΕΠ αλλά και από άλλες πηγές έκρινα σκόπιμο να τις ξαναλύσω για τους εξής λόγους:

- είναι απαραίτητο ο διδάσκον να έχει αφομοιώσει την ύλη του μαθήματος πριν το διδάξει,
- να κατηγοριοποιηθούν οι ασκήσεις σύμφωνα με την ροή της διδασκαλίας του μαθήματος όπως αυτή διεξάγεται στο σχολείο κατά την διάρκεια του σχολικού έτους
- και να διαμορφωθεί μια μέθοδος ώστε ο μεγάλος όγκος των ασκήσεων να γίνει κτήμα των μαθητών με το μικρότερο δυνατό κόστος σε πόρους.

Στο πρώτο μέρος, λοιπόν, που κρατάτε στα χέρια σας, θα βρείτε τις ασκήσεις της Τράπεζας Θεμάτων που αντιστοιχούν στα κεφάλαια:

- Οι πράξεις και οι ιδιότητες τους (12 ασκήσεις)
- Διάταξη πραγματικών αριθμών (12 ασκήσεις)
- Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού (19 ασκήσεις)
- Ρίζες πραγματικών αριθμών (19 ασκήσεις)

που θεωρώ ότι είναι μια φυσική επέκταση των γνώσεων που έχετε από την Γ΄ Γυμνασίου.

Φιλικά

Κουμουνδούρος Ιωάννης, Σπάρτη 2023.

Κωδικοί ασκήσεων

Άλγεβρα Α Λυκείου

Ασκήσεις της Τράπεζας Θεμάτων

Κουμουνδούρος Γιάννης

2.1 Οι Πράξεις και οι ιδιότητές τους

Κωδικοί ασκήσεων

«Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)».

Οι απαντήσεις τροποποιήθηκαν εν μέρη και επιμελήθηκαν από τον Κουμουνδούρο Γιάννη.

35388, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 2, 2023

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$ *(Μονάδες 10)*

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$ *(Μονάδες 15)*

Λύση:

(α) Είναι

$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow$

$\alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow$

$\alpha=4\beta-\beta \Leftrightarrow$

$\alpha=3\beta$

και

$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\delta-\gamma=4\gamma \Leftrightarrow$

$\delta=\gamma+4\gamma \Leftrightarrow$

$\delta=5\gamma$

(β) Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην παράσταση Π είναι:

$\Pi =$

$\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma} =$

$\frac{(\alpha+\beta)\gamma}{(\delta-\gamma)\beta} =$

$\frac{(3\beta+\beta)\gamma}{(5\gamma-\gamma)\beta} =$

$\frac{4\beta\gamma}{4\gamma\beta} =$

1

36884, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 2, 2023

(α) Να δείξετε ότι για οποιοσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$

(Μονάδες 12)

(β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y, ώστε:

$x^2+y^2-2x+6y+10=0$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Κάνουμε τις πράξεις στο πρώτο μέλος:

$(x-1)^2+(y+3)^2 =$

$x^2-2x+1+y^2+6y+9 =$

$x^2+y^2-2x+6y+10$

(β) Με την βοήθεια του πρώτου ερωτήματος είναι:

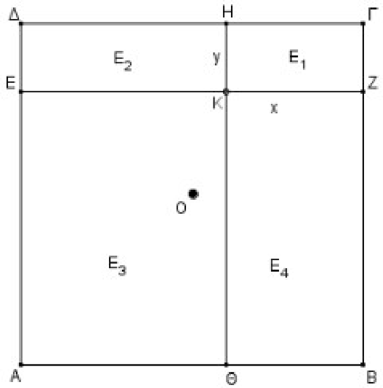
$x^2+y^2-2x+6y+10=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+3)^2=0 \Leftrightarrow$

$\{x-1=0 \; και \; y+3=0\} \Leftrightarrow$

$\{x=1 \; και \; y=-3\}$

15052, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 2, 2023



Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ=x$ και $KH=y$ και $x, y \in (0,6)$, τότε:

(α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με την βοήθεια των x, y *(Μονάδες 8)*

(β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x=4$ και $y=2$ *(Μονάδες 6)*

(γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1+E_3=E_2+E_4$, να αποδείξετε ότι:

(i) $xy+9=3(x+y)$ *(Μονάδες 6)*

(ii) Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου *(Μονάδες 5)*

Λύση:

(α) Είναι

$E_1 =$

$KH \cdot KZ =$

xy

$E_2 =$

$EK \cdot KH =$

$(EZ-KZ) \cdot KH =$

$(6-x)y =$

$6y-xy$

$E_3 =$

$EK \cdot K\Theta =$

$(EZ-KZ) \cdot (H\Theta-HK) =$

$(6-x)(6-y) =$

$36-6y-6x+xy$

$E_4 =$

$KZ \cdot K\Theta =$

$KZ \cdot (H\Theta-HK) =$

$x(6-y) =$

$6x-xy$

(β) Με αντικατάσταση για $x=4$ και $y=2$ έχουμε:

$E_1 =$

$xy =$

$4\cdot 2 =$

8

$E_2 =$

$6y-xy =$

$6\cdot 2-4\cdot 2 =$

$12-8 =$

4

$E_3 =$

$36-6y-6x+xy =$

$36-6\cdot 2-6\cdot 4+4\cdot 2 =$

8

$E_4 =$

$6x-xy =$

$6\cdot 4-4\cdot 2 =$

16

(γ) (i) Από την ισότητα που μας δίνεται στην υπόθεση:

$E_1+E_3=E_2+E_4 \Leftrightarrow$

$xy+36-6y-6x+xy=6y-xy+6x-xy \Leftrightarrow$

$4xy+36=12y+12x \Leftrightarrow$

$xy+9=3y+3x \Leftrightarrow$

$xy+9=3(x+y)$

(γ) (ii) Εν συνεχεία των προηγουμένων πράξεων έχουμε:

$xy+9-3y-3x=0 \Leftrightarrow$

$y(x-3)-3(x-3)=0 \Leftrightarrow$

$(x-3)(y-3)=0 \Leftrightarrow$

$\{x=3 \text{ ή } y=3\}$

Εάν $x=3$ είναι $EK=KZ=3$ δηλαδή το ΘΗ διέρχεται από το κέντρο Ο

Όμοια εάν $y=3$ το ΕΖ διέρχεται από το κέντρο.

14555, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 4, 2022

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει η σχέση:

$(x-2y)^2-2(3-2xy)=5y^2-1$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$x^2-y^2=5$

(Μονάδες 12)

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$P=(x+y)^3(x-y)^3$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Εκτελούμε τις πράξεις:

$(x-2y)^2-2(3-2xy)=5y^2-1 \Leftrightarrow$

$x^2-4xy+4y^2-6+4xy=5y^2-1 \Leftrightarrow$

$x^2-4xy+4y^2+4xy-5y^2=6-1 \Leftrightarrow$

$x^2-y^2=5$

(β) Με την βοήθεια των ιδιοτήτων έχουμε:

$P \ =$

$(x+y)^3(x-y)^3 \ =$

$[(x+y)(x-y)]^3 \ =$

$(x^2-y^2)^3 \ =$

$5^3 \ =$

125

14489, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 2, 2022

Αν οι αριθμοί $2\alpha-1$ και $\beta-1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha\neq 1$ και $\beta\neq 1$ να δείξετε ότι:

(α) $2\alpha+\beta=2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

(β) Οι αριθμοί $x=\alpha-\beta$ και $y=\alpha(1-2\beta)+2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

Λύση:

(α) Εφόσον οι αριθμοί $2\alpha-1$ και $\beta-1$ είναι αντίστροφοι με $\alpha\neq 1$ και $\beta\neq 1$ έχουμε ότι το γινόμενο αυτών των αριθμών θα είναι ίσο με 1:

$(2\alpha-1)(\beta-1)=1 \Leftrightarrow$

$2\alpha\beta-\beta-2\alpha+1=1 \Leftrightarrow$

$2\alpha\beta=2\alpha+\beta$.

(β) Για να είναι οι αριθμοί x και y αντίθετοι αρκεί να δείξουμε ότι το άθροισμά τους είναι ίσο με μηδέν:

$x+y=0$.

Συνεπώς,

$x+y \ =$, αντικαθιστούμε τα x και y

$(\alpha-\beta)+\alpha(1-2\beta)+2\beta \ =$

$\alpha-\beta+\alpha-2\alpha\beta+2\beta \ =$

$2\alpha+\beta-2\alpha\beta \ =$

0 που ισχύει.

14473, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 2, 2022

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει:

$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

(α) Να δείξετε ότι $y=2x$.

(Μονάδες 12)

(β) Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Εκτελούμε διαδοχικά τις πράξεις:

$$\frac{4x+5y}{\chi-4y}=-2 \quad \Leftrightarrow$$

$$4x+5y=-2(x-y) \quad \Leftrightarrow$$

$$4x+y=-2x+y \quad \Leftrightarrow$$

$$-3y=-6y \quad \Leftrightarrow$$

$$y=2x$$

(β) Στην παράσταση Α αντικαταστούμε $y=2x$

$$A \quad =$$

$$\frac{2x^2+y^2+xy}{\chi y} \quad =$$

$$\frac{2x^2+3(2x)^2+x(2x)}{x(2x)} \quad =$$

$$\frac{2x^2+3(4x^2)+2x^2}{2x^2} \quad =$$

$$\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2} \quad =$$

$$\frac{16x^2}{2x^2} \quad =$$

$$8$$

14458, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 2, 2022

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:
$(x+4y)(x+y)=9xy$.

(α) Να αποδείξετε ότι

(i) $(2y-x)^2=0$

(Μονάδες 8)

(ii) $y=\frac{x}{2}$

(Μονάδες 5)

(β) Να αποδείξετε ότι

$$\left(2y-\frac{x}{2}\right)+\left(2y+\frac{x}{2}\right)=10y^2$$

(Μονάδες 12)

Λύση:

(α) (i) Εκτελούμε διαδοχικά τις πράξεις:

$$(x+4y)(x+y)=9xy \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2+xy+4xy+4y^2-9xy=0 \quad \Leftrightarrow$$

$x^2-4xy+4y^2=0 \iff$

$(x-2y)^2=0 \iff$

$[-(2y-x)]^2=0 \iff$

$(2y-x)^2=0$

(α) (ii) Συνεχίζουμε με τις πράξεις:

$(2y-x)^2=0 \iff$

$2y-x=0 \iff$

$2y=x \iff$

$y=\frac{x}{2}$

(β) Θα αντικαταστήσουμε το $\frac{x}{2}$ με το y στο πρώτο μέλος και θα κάνουμε τις πράξεις:

$\left(2y-\frac{x}{2}\right)+\left(2y+\frac{x}{2}\right) =$

$y^2+(3y)^2 =$

$y^2+9y^2 =$

$10y^2$

14329, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 3, 2022

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A=\frac{-\alpha}{\beta}$, $B=\alpha^2$.

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α , β οι αλγεβρικές παραστάσεις Α , Β είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

(Μονάδες 10)

(β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί Α , Β είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 15)

Λύση:

(α) Η παράσταση $A=\frac{-\alpha}{\beta}$ για να ορίζεται πρέπει να είναι $\beta\neq 0$ και για να μην είναι μηδέν πρέπει $\alpha\neq 0$.

Η παράσταση $B=\alpha^2$ ορίζεται για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ και για να μην είναι 0 πρέπει $\alpha\neq 0$

Επομένως οι παραστάσεις Α και Β για να πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του μηδενός πρέπει $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$.

(β) Δύο αριθμοί Α,Β λέγονται αντίθετοι, αν και μόνο, αν ισχύει : $A+B=0$, δηλαδή:

$A+B=0 \iff$

$\frac{-\alpha}{\beta}+\alpha^2=0 \iff$

$\alpha^2\beta-\alpha=0 \iff$

$\alpha(\alpha\beta-1)=0 \iff$

$\{\alpha=0 \, ή \, \alpha\beta-1=0\} \iff$

$\{\alpha=0 \, ή \, \alpha\beta=1\}$

Αφού $\alpha\beta=1$ οι αριθμοί α ,β είναι αντίστροφοι.

13472, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 2, 2022

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν

$\alpha^2=2\alpha+\beta$ και $\beta^2=2\beta+\alpha$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha^2-\beta^2=\alpha-\beta$

(Μονάδες 8)

(ii) $\alpha+\beta=1$

(Μονάδες 8)

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$A=\alpha^2+\beta^2$

(Μονάδες 9)

Λύση:

(α) (i) Αντικαταστούμε τα α^2 και β^2 στο πρώτο μέλος και κάνουμε τις πράξεις:

$\alpha^2-\beta^2 \quad =$

$(2\alpha+\beta)-(2\beta+\alpha) \quad =$

$2\alpha+\beta-2\beta-\alpha \quad =$

$\alpha-\beta$

(α) (ii) Από την τελευταία εξίσωση $\alpha^2-\beta^2=\alpha-\beta$ έχουμε:

$\alpha^2-\beta^2=\alpha-\beta \quad \Rightarrow$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=0 \quad \Rightarrow$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+1)=0 \quad \Rightarrow$

$\alpha+\beta-1=0 \quad \Rightarrow$, αφού $\alpha-\beta\neq 0$ ή $\alpha\neq\beta$

$\alpha+\beta=1$

(β) Αντικαθιστούμε τα α^2 και β^2 και κάνουμε τις πράξεις:

$A \quad =$

$\alpha^2+\beta^2 \quad =$

$(2\alpha+\beta)(2\beta+\alpha) \quad =$

$3\alpha+3\beta \quad =$

$3(\alpha+\beta) \quad =$

$3\cdot 1 \quad =$

3

13053, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 2, 2021

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι

(i) $\beta+\gamma=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

(ii) $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

(β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0$$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) (i) Έχουμε ότι $\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \beta+\gamma=-\alpha$

(α) (ii) Είναι $\frac{\alpha^\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha^2}{-\alpha}=-\alpha$, διότι $\beta+\gamma=-\alpha$

(β) Είναι $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta^2}{-\beta}=-\beta$, διότι $\gamma+\alpha=-\beta$

και $\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma^2}{-\gamma}=-\gamma$, διότι $\alpha+\beta=-\gamma$

επομένως

$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} =$

$-\alpha-\beta-\gamma =$

$-(\alpha+\beta+\gamma) =$

0, αφού $\alpha+\beta+\gamma=0$

13088, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 2, 2021

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε:
$A=2(x+y)^2-(x-y)^2-6xy-y^2$

(α) Να αποδείξετε ότι : $A=x^2$

(Μονάδες 13)

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B=2\cdot 2022^2-2020^2-6\cdot 2021-1$ είναι ίσος με το

τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

Λύση:

(α) Έχουμε διαδοχικά:

$A =$

$2(x+y)^2-(x-y)^2-6xy-y^2 =$

$2(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)-6xy-y^2 =$

$2x^2+4xy+2y^2-x^2+2xy+y^2-6xy-y^2 =$

x^2

(β) Παρατηρήστε ότι η παράσταση Β γράφεται

$B =$

$2\cdot 2022^2-2020^2-6\cdot 2021-1 =$

$2\cdot(2021+1)^2-(2021-1)^2-6\cdot 2021\cdot 1-1^1$

που είναι η προηγούμενη σχέση $2(x+y)^2-(x-y)^2-6xy-y^2$

για $x=2021$ και $y=1$

επομένως

$B=2021^2$

και ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 2021.

12658, Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, θέμα 2, 2021

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α , $\beta\neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$.

(Μονάδες 12)

(β) $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Κάνουμε τις πράξεις:

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4 \Leftrightarrow$

$\alpha\frac{1}{\alpha}+\alpha\frac{1}{\beta}+\beta\frac{1}{\alpha}+\beta\frac{1}{\beta}=4 \Leftrightarrow$

$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1=4 \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$

(β) Συνεχίζουμε με τις πράξεις:

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2 \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με $\alpha\beta\neq 0$

$\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow$

$\alpha-\beta=0 \Leftrightarrow$

$\alpha=\beta$.

Άλγεβρα Α Λυκείου

Ασκήσεις της Τράπεζας Θεμάτων

Κουμουνδούρος Γιάννης

2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

Κωδικοί ασκήσεων

37179	36899	35040	14713	14704
14602	14492	14475	13323	13266
12922	12673			

37179, Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 2, 2023

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α , β .

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α , β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$;

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Είναι

$K\geq\Lambda \Leftrightarrow$

$2\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$2\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)+\alpha^2\geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2+\alpha^2\geq 0$

που ισχύει πάντα για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

(β) Σε συνέχεια των προηγούμενων πράξεων λύνουμε την εξίσωση:

$K=\Lambda \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2+\alpha^2=0 \Leftrightarrow$

$\{\alpha-\beta=0 \kappa\alpha\iota\ \alpha=0\} \Leftrightarrow$

$\{\alpha=\beta\ \kappa\alpha\iota\ \alpha=0\}$

Επομένως, $K=\Lambda$ αν και μόνο αν $\alpha=\beta=0$

36889, Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 2, 2023

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α,β με $\alpha>0$ και $\beta>0$. Να δείξετε ότι:

(α) $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4$

(Μονάδες 12)

(β) $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Έχουμε διαδοχικά τις ακόλουθες πράξεις

$\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4 \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με $\alpha>0$

$\alpha^2+4\geq 4\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2-4\alpha+4\geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-2)^2\geq 0$, που ισχύει.

Λόγω των ισοδυναμιών ισχύει και η αρχική.

(β) Με ακριβώς ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι για $\beta>0$ είναι $\beta+\frac{4}{\beta}\geq 4$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη τις σχέσεις $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4$ και $\beta+\frac{4}{\beta}\geq 4$, λάβετε υπόψιν ότι επιτρέπετε αφού κάθε μέλος είναι θετικό. Επομένως έχουμε

$\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 4\cdot 4 \Leftrightarrow$

$\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$

που είναι το ζητούμενο.

14713, Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 3, 2023

Δίνεται η παράσταση $A=\frac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}$, $\alpha>0$ Να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=(\alpha^2+9)(\alpha+2)$.

(Μονάδες 7)

β) Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει

(i) $A=\frac{\alpha^2+9}{\alpha}$

(Μονάδες 8)

(ii) $A\geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A=6$;

(Μονάδες 10)

<u>Λύση:</u>

(α) Κάνουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος:

$(\alpha^2+9)(\alpha+2)$ =

$\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18$

που είναι το ζητούμενο.

(β) (i) Για $\alpha>0$ έχουμε

$A=\frac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}$ =

$\frac{(\alpha^2+9)(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+2)}$ =

$\frac{\alpha^2+9}{\alpha}$

(β) (ii) Είναι

$A\geq 6$ ⇔

$\frac{\alpha^2+9}{\alpha}\geq 6$ ⇔ , για $\alpha>0$

$\alpha^2+9\geq 12\alpha$ ⇔

$\alpha^2-12\alpha+9\geq 0$ ⇔

$(\alpha-3)^2\geq 0$

που ισχύει πάντα

Τώρα για την ισότητα έχουμε:

$A=6$ ⇔

$(\alpha-3)^2=0$ ⇔

$\alpha-3=0$ ⇔

$\alpha=3$

35040, Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 2, 2023

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι: $K-\Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$.

(Μονάδες 3)

(β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α,β .

(Μονάδες 10)

(γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

<u>Λύση:</u>

(α) Αντικαθιστούμε στο πρώτο μέλος και κάνουμε τις πράξεις:

$K-\Lambda=(2\alpha^2+\beta^2+9)-[2\alpha(3-\beta)] \quad =$

$2\alpha^2+\beta^2+9-6\alpha+2\alpha\beta \quad =$

$\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+9-6\alpha+2\alpha\beta \quad =$

$(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$

(β) Είναι

$K \geq \Lambda \quad \Leftrightarrow$

$K-\Lambda \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-3)^2 \geq 0$

που ισχύει πάντα.

(γ) Είναι

$K=\Lambda \quad \Leftrightarrow$

$K-\Lambda=0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-3)^2=0 \quad \Leftrightarrow$

$\{\alpha+\beta=0 \, \kappa\alpha\iota \, \alpha-3=0\} \quad \Leftrightarrow$

$\{\alpha=-\beta \, \kappa\alpha\iota \, \alpha=3\} \quad \Leftrightarrow$

$\{\beta=-3 \, \kappa\alpha\iota \, \alpha=3\}$

14704 , Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 2, 2022

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

(α) $x+y$

(Μονάδες 5)

(β) $2x-3y$

(Μονάδες 10)

(γ) $\dfrac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

<u>Λύση:</u>

(α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες της υπόθεσης:

$2+1 \leq x+y \leq 3+2 \quad \Leftrightarrow$

$3 \leq x+y \leq 5$

(β) Πολλαπλασιάζω την $2 \leq x \leq 3$ με 2 και έχουμε $4 \leq 2x \leq 6$ (Σχέση 1)

Πολλαπλασιάζω την $1 \leq y \leq 2$ με -3 και έχουμε $-3 \geq -3y \geq 6 \quad \Leftrightarrow$
$-6 \leq -3y \leq -3$ (Σχέση 2)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις 1 και 2 και έχουμε
$4-6\leq 2x-3y\leq 6-3 \iff -2\leq 2x-3y\leq 3$

(γ) Από την υπόθεση έχουμε ότι $2\leq x\leq 3$ (Σχέση 3)

Ακόμη έχουμε $1\leq y\leq 2 \iff \frac{1}{1}\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}\leq\frac{1}{y}\leq 1$ (Σχέση 4).

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη τις σχέσεις 3 και 4:

$\frac{2\cdot 1}{2}\leq x\cdot\frac{1}{y}\leq 3\cdot 1 \iff 1\leq\frac{x}{y}\leq 3$.

14602 , Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 3, 2022

Αν $0<\alpha<1$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $0<\alpha^3<\alpha$.

(Μονάδες 13)

(β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$0,\alpha^3,1,\alpha,\frac{1}{\alpha}$

(Μονάδες 12)

Λύση:

Έχουμε τις παρακάτω σχέσεις διάταξης:

- $0<\alpha<1$, (Σχέση 1), από την υπόθεση.
- $\alpha<1 \iff \frac{1}{\alpha}>1$, (Σχέση 2).
- $0<\alpha<1 \iff 0<\alpha^2<\alpha$, (Σχέση 3), αφού πολλαπλασιάζουμε με $\alpha>0$.
- $0<\alpha<1 \iff 0<\alpha^3<\alpha^2$, (Σχέση 4), αφού πολλαπλασιάζουμε με $\alpha^2>0$.

(α) Από τις σχέσεις 3 και 4 είναι ότι:

$0<\alpha^3<\alpha$

(β) Από τις σχέσεις 1 έως 4 έχουμε:

$0<\alpha^3<\alpha<1<\frac{1}{\alpha}$

14492, Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 2, 2022

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\leq x\leq 7$ και $2\leq y\leq 3$ τότε:

(α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

(β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές x και y δίνεται από τον τύπο $\Pi=2x+2y$.

Έχουμε:

$4 \le x \le 7 \quad \Leftrightarrow$

$4 \cdot 2 \le 2x \le 2 \cdot 7 \quad \Leftrightarrow$

$8 \le 2x \le 14$, (Σχέση 1)

Ακόμα,

$2 \le y \le 3 \quad \Leftrightarrow$

$4 \le 2y \le 6$, (Σχέση 2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις 1 και 2 έχουμε

$8+4 \le 2x+2y \le 14+6 \quad \Leftrightarrow$

$12 \le \Pi \le 20$

(β) Εάν το x μειωθεί κατά 1 γίνεται $(x-1)$ και εάν το y τριπλασιαστεί γίνεται $3y$, τότε η νέα περίμετρος είναι:

$\Pi' = 2(x-1)+2(3y) \quad =$

$2x-2+6y$

Ακόμα,

$2 \le y < 3 \quad \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με $+6$,

$12 \le 6y \le 18$ (Σχέση 3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις 1 και 3 έχουμε:

$8+12 \le 2x+6y \le 14+18 \quad \Leftrightarrow$

$20 \le 2x+6y \le 32 \quad \Leftrightarrow$

$20-2 \le 2x+6y-2 \le 32-2 \quad \Leftrightarrow$

$18 \le 2x-2+6y \le 30 \quad \Leftrightarrow$

$18 \le \Pi' \le 30$

14475, Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 2, 2022

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

(α) $\alpha+2\beta$.

(Μονάδες 12)

(β) $\alpha-\beta$.

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Έχουμε $2 \le \alpha \le 4$ (Σχέση 1), από την υπόθεση.

Ακόμα,

$-4 \le \beta \le -3 \quad \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με $+2$.

$-8 \le 2\beta \le -6$, (Σχέση 2).

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις 1 και 2:

$2-8 \le \alpha+2\beta \le 4-6 \quad \Leftrightarrow$

$-6 \le \alpha+2\beta \le -2$.

(β) Είναι

$-4 \le \beta \le -3 \quad \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με (-1)

$4 \ge -\beta \ge 3 \quad \Leftrightarrow$

$3 \le -\beta \le 4$ (Σχέση 3).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις 1 και 3 είναι:

$2+3 \le \alpha-\beta \le 4+4 \quad \Leftrightarrow$

$5 \leq \alpha - \beta \leq 8$.

13266, Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 2, 2021

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

(β)

(i) Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$

(Μονάδες 9)

(ii) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$

(Μονάδες 8)

<u>Λύση:</u>

(α) Κάνουμε πράξεις:

$(\alpha + 2)^2 + 1 \quad =$

$\alpha^2 + 4\alpha + 4 + 1 \quad =$

$\alpha^2 + 4\alpha + 5 = A$

(β) (i) Έχουμε ισοδύναμα

$A + B \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha^2 + 4\alpha + 5) + (2\beta + 1)^2 - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha^2 + 4\alpha + 4) + 1 + (2\beta + 1)^2 - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha + 2)^2 + 1 + (2\beta + 1)^2 - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 \geq 0$,

που ισχύει πάντα.

(β) (ii) Συνεχίζουμε τις πράξεις λύνοντας μόνο την ισότητα

$A + B = 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\{\alpha + 2 = 0 \; \kappa\alpha\iota \; 2\beta + 1 = 0\} \quad \Leftrightarrow$

$\left\{\alpha = -2 \; \kappa\alpha\iota \; \beta = -\frac{1}{2}\right\}$

12922, Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 2, 2021

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

(Μονάδες 8)

(β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

(γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

(Μονάδες 8)

<u>Λύση:</u>

(α) Λύνουμε την εξίσωση

$A = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\{\alpha=0 \, και \, \beta=0\}$

(β) Έχουμε ισοδύναμα

$A-B\geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2\geq 0$,

που ισχύει πάντα.

(γ) Συνεχίζοντας τις πράξεις λύνουμε μόνο την ισότητα

$A-B=0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2=0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha-\beta=0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha=\beta$.

13323, Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 2, 2021

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17$

(Μονάδες 12)

(β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε:

$x^2+y^2-2x+8y+17=0$.

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Κάνουμε τις πράξεις στο πρώτο μέλος

$(x-1)^2+(y+4)^2 \quad =$

$x^2-2x+1+y^2+8y+16 \quad =$

$x^2+y^2-2x+8y+17$.

(β) Λύνουμε την εξίσωση

$x^2+y^2-2x+8y+17=0 \quad \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+4)^2=0 \quad \Leftrightarrow$

$\{(x-1)^2=0 \, και \, (y+4)^2=0\} \quad \Leftrightarrow$

$\{x-1=0 \, και \, y+4=0\} \quad \Leftrightarrow$

$\{x=1 \, και \, y=-4\}$

12673, Διάταξη πραγματικών αριθμών, θέμα 2, 2021

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0<\alpha<\beta$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

(β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$

(Μονάδες 12)

Λύση:

(α) Αφού $0<\alpha<\beta$, έχουμε διαδοχικά

$\alpha<\beta \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta} \quad \Leftrightarrow$

$3\cdot\frac{1}{\alpha}>3\cdot\frac{1}{\beta} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{3}{\alpha}>\frac{3}{\beta}$

(β) Έχουμε: $\frac{3}{\alpha}>\frac{3}{\beta}$, (Σχέση 1), από το ερώτημα (α).

Ακόμη, $\alpha<\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^3<\beta^3$, (Σχέση 2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις 1 και 2 έχουμε

$\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3\frac{3}{\alpha}$

που είναι το ζητούμενο.

Άλγεβρα Α Λυκείου

Ασκήσεις της Τράπεζας Θεμάτων

Κουμουνδούρος Γιάννης

2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

«Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)».

Οι απαντήσεις τροποποιήθηκαν εν μέρη και επιμελήθηκαν από τον Κουμουνδούρο Γιάννη.

37201, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2023

Δίνεται η παράσταση $A=|x-1|+|y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $A=x-y+2$.

(Μονάδες 12)

(β) $0<A<4$.

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Αρχικά

$1<x<4 \quad \Leftrightarrow$

$\{x>1 \, και \, x<4\} \quad \Leftrightarrow$

$\{x-1>0 \, και \, x-4<0\}$

Ακόμα

$2<y<3 \quad \Leftrightarrow$

$\{y>2 \, και \, y<3\} \quad \Leftrightarrow$

$\{y-2>0 \, και \, y-3<0\}$

Επομένως

$A=|x-1|+y-3 \quad =$

$x-1-(y-3) \quad =$

$x-1-y+3 \quad =$

$x-y+2$

(β) Είναι

$1<x<4$ (Σχέση 1), από την υπόθεση και

$2<y<3 \quad \Leftrightarrow \quad -2>-y>-3 \quad \Leftrightarrow \quad -3<-y<-2$ (Σχέση 2)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις 1 και 2

$1-3<x-y<4-2 \quad \Leftrightarrow$

$-2<x-y<2 \quad \Leftrightarrow$

$-2+2<x-y+2<2+2 \quad \Leftrightarrow$

$0<A<4$

36898, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2023

(α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}-\{0\}$, να δείξετε ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\geq 2$ (Σχέση 1)

(Μονάδες 15)

(β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Λύση:

(α) Έχουμε ισοδύναμα τις πράξεις

$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\geq 2 \quad \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με $|\alpha|\cdot|\beta|>0$

$|\alpha|\cdot|\beta|\frac{|\alpha|}{|\beta|}+|\alpha|\cdot|\beta|\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\geq 2|\alpha|\cdot|\beta| \quad \Leftrightarrow$

$|\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha|\cdot|\beta|\geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(|\alpha|-|\beta|)^2 \geq 0$,

που ισχύει πάντα.

(β) Η ισότητα ισχύει όταν

$(|\alpha|-|\beta|)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$|\alpha|-|\beta| = 0 \quad \Leftrightarrow$

$|\alpha| = |\beta| \quad \Leftrightarrow$

$\{\alpha = \beta \, ή \, \alpha = -\beta\}$

36894, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2023

(α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$

(Μονάδες 15)

(β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

Λύση:

(α) Έχουμε

$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \quad \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με $\alpha < 0$

$(\alpha + \frac{1}{\alpha})\alpha \geq -2\alpha \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 1 + 2\alpha \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha + 1)^2 \geq 0$,

που ισχύει πάντα.

(β) Έχουμε

$|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2 \quad \Leftrightarrow$

$-\alpha + \frac{1}{-\alpha} \geq 2 \quad \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με $\alpha < 0$,

$(-\alpha - \frac{1}{\alpha})\alpha \leq 2\alpha \quad \Leftrightarrow$

$-\alpha^2 + 2\alpha + 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με -1

$\alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha + 1)^2 \geq 0$,

που ισχύει πάντα.

36672, Απόλυτη τιμή, θέμα 4, 2023

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

(α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

(i) $|x+2|$

(Μονάδες 4)

(ii) $|x-7|$

(Μονάδες 4)

(β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$.

(Μονάδες 5)

(γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

(δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Μονάδες 7)

Λύση:

(α) (i) Είναι

$|x+2|=d(x,-2)$

δηλαδή είναι η απόσταση του σημείου $M(x)$ από το σημείο $A(-2)$, βλέπε το παρακάτω σχήμα

$MA=|x+2|$ (Σχέση 1)

(α) (ii) Όμοια είναι

$|x-7|=d(x,7)$

δηλαδή είναι η απόσταση του σημείου $M(x)$ από το σημείο $B(7)$, βλέπε στο σχήμα

$MB=|x-7|$ (Σχέση 2)

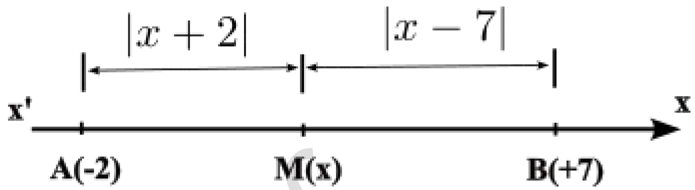
(β) Με την βοήθεια των σχέσεων 1 και 2 έχουμε:

$|x+2|+|x-7|$ =

$AM+MB$ =

AB

είναι δηλαδή η απόσταση AB, βλέπε στο σχήμα.



(γ) Είναι

$|x+2|+|x-7|$ =

AB =

$d(-2,7)$ =

$|-2-7|=9$

(δ) Έχουμε ότι

$-2<x<7$ ⇔

$\{x>-2 \; και \; x<7\}$ ⇔

$\{x+2>0 \; και \; x-7<0\}$

Επομένως

$A=|x+2|+|x-7|$ =

$x+2-x+7$ =

9

35412, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2023

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5<x<10$,

(α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

(β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

Λύση:

(α) Έχουμε,

$5<x<10 \quad \Leftrightarrow$

$5-5<x-5<10-5 \quad \Leftrightarrow$

$0<x-5<5$

Δηλαδή η ποσότητα x -5 είναι θετική, επομένως $|x-5|=x-5$

Με ίδιο τρόπο είναι:

$5<x<10 \quad \Leftrightarrow$, προσθέτουμε το (-10)

$-5<x-10<0$

επομένως

$|x-10|=-(x-10)=-x+10$

(β) Είναι

$$A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10} \quad =$$

$$\frac{x-5}{x-5}-\frac{x-10}{x-10} \quad =$$

$1-1=0$

14932, Απόλυτη τιμή, θέμα 1, 2023

(α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

(i) Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha\neq 0$ και $\beta=0$.

(ii) Αν $\alpha\leq 0$ και ν άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}=\alpha$.

(iii) Αν $\alpha>0$ και $\Delta<0$ η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(iv) Αν η απόσταση του x από το 0 είναι ίση με 3, τότε $x=3$ ή $x=-3$.

(v) Η γραφική παράταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα y′y.

(Μονάδες 10)

(β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι

$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$.

(Μονάδες 15)

Λύση:

(α) (i) Λ, *(ii)* Λ, *(iii)* Λ, *(iv)* Σ, *(v)* Σ.

(β) Βλέπε θεωρία ενότητας 2.3. Απόδειξη ιδιότητας 3 σελίδα 63.

14811, Απόλυτη τιμή, θέμα 1, 2023

(α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο

αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

(i) Το σημείο $M(x,y)$ με $x>0$ και $y<0$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

(ii) Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2=\alpha\cdot\gamma$.

(iii) Ισχύει $|\alpha|\geq\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

(iv) Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$, τότε: $\alpha-\gamma>\beta-\delta$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ.

(v) Η εξίσωση $\alpha x=\alpha$ έχει μοναδική λύση $x=1$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

(β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι: $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$

(Μονάδες 15)

Λύση:

(α) (i) Λ, *(ii)* Σ, *(iii)* Σ, *(iv)* Λ, *(v)* Λ

(β) Βλέπε την απόδειξη στην σελίδα 63.

35112, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2023

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

(α) Να αποδείξετε ότι:

(i) για κάθε $x\geq 2$, $A=3x-4$

(ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$

(Μονάδες 12)

(β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) (i) Έχουμε διαδοχικά:

$x>2 \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με +3

$3x>3\cdot 2 \Leftrightarrow$

$3x>6 \Leftrightarrow$

$3x-6>0$

επομένως

$|3x-6|=3x-6$

Τότε

$A=|3x-6|+2 =$

$3x-6+2 =$

$3x-4$

(α) (ii) Με όμοιο τρόπο

$x<2 \Leftrightarrow$

$3x<3\cdot 2 \Leftrightarrow$

$3x<6 \Leftrightarrow$

$3x-6<0$

επομένως

$|3x-6| =$

$-(3x-6) =$

$-3x+6$

Τότε

$A=|3x-6|+2 =$

$6-3x+2 =$

$8-3x$

(β) Για κάθε $x\geq 2$ είναι

$|3x-6|=3x-6$

Επομένως

$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} =$

$\frac{(3x)^2-4^2}{3x-6+2} =$

$\frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4} =$

$3x+4$

35041, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2023

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$

(α) Να αποδείξετε ότι $x\leq\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

(β) Αν $x\leq\frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Είναι

$d(2x,3)=3-2x \Leftrightarrow$

$|2x-3\pi|=3-2x$

επομένως

$3-2x\geq 0 \Leftrightarrow$

$3\geq 2x \Leftrightarrow$

$x\leq\frac{3}{2}$

(β) Είναι

$x\leq\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x\leq 3 \Leftrightarrow 2x-3\leq 0$ (Σχέση 1)

$x\leq\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$-x\geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$3-x \geq 3-\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow$

$3-x \geq \frac{3}{2}$, (Σχέση 2), δηλαδή θετική ποσότητα

Από τις σχέσεις 1 και 2 είναι

$|2x-3| \quad =$

$-(2x-3) \quad =$

$3-2x$

και

$|3-x| \quad = \quad 3-x$

Επομένως

$K=|2x-3|-2|3-x| \quad =$

$3-2x-2(3-x) \quad =$

$3-2x-6+2x \quad = \quad 3$

Δηλαδή ανεξάρτητη του x

33888, Απόλυτη τιμή, θέμα 4, 2023

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$(\alpha-1)(1-\beta)>0$

(α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β

(Μονάδες13)

(β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$K=|\alpha-1|+|1-\beta|$

(Μονάδες 12)

Λύση:

(α) Αφού $(\alpha-1)(1-\beta)>0$, οι $(\alpha-1)$ και $(1-\beta)$ είναι ομόσημοι.
Δηλαδή υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

(i) $\{\alpha-1>0 \,και\, 1-\beta>0\} \quad \Leftrightarrow$

$\{\alpha>1 \,και\, \beta<1\} \quad \Leftrightarrow$

$\beta<1<\alpha$

(ii) $\{\alpha-1<0 \,και\, 1-\beta<0\} \quad \Leftrightarrow$

$\{\alpha<1 \,και\, \beta>1\} \quad \Leftrightarrow$

$\alpha<1<\beta$

Και στις δύο περιπτώσεις το 1 είναι μεταξύ των α και β.

(β) Υπάρχουν πάλι δύο περιπτώσεις

(i) Εάν $\beta<1<\alpha$ τότε

$\{\beta<1 \,και\, \alpha>1\} \quad \Leftrightarrow$

$\{0<1-\beta \,και\, \alpha-1>0\}$

Ακόμα αφού $\beta<\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \beta-\alpha<0$ έχουμε

$|\beta-\alpha|=4 \quad \Leftrightarrow$

$-(\beta-\alpha)=4 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha-\beta=4$

Επομένως η παράσταση Κ γράφεται

$K=|\alpha-1|+|1-\beta| \quad =$

$\alpha-1+1-\beta \quad =$

$\alpha-\beta=4$

(ii) Εάν $\alpha<1<\beta$ τότε

$\{\alpha<1 \, και \, \beta>1\} \quad \Leftrightarrow$

$\{\alpha-1<0 \, και \, 1-\beta<0\}$.

Ακόμα αφού $\alpha<\beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta-\alpha>0$ έχουμε

$|\beta-\alpha|=4 \quad \Leftrightarrow$

$\beta-\alpha=4$

Επομένως η παράσταση Κ γράφεται

$K=|\alpha-1|+|1-\beta| \quad =$

$-(\alpha-1)-(1-\beta) \quad =$

$-\alpha+1-1+\beta \quad =$

$\beta-\alpha=4$

Τελικά σε κάθε περίπτωση είναι $K=4$.

15054, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2023

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha<0<\beta<\gamma$.

(α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A=\alpha(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)$ είναι θετικός.

(Μονάδες 16)

(β) Να αποδείξετε ότι $\alpha+|\alpha-\beta|+|\gamma-\beta|-\gamma=0$.

(Μονάδες 9)

<u>Λύση:</u>

(α) Έχουμε τα παρακάτω:

- $\beta>0$, από την υπόθεσης
- $\alpha<0$, από την υπόθεση
- $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$
- $\beta<\gamma \Leftrightarrow 0<\gamma-\beta$

Αφού στο γινόμενο των τεσσάρων παραγόντων οι δύο από αυτούς είναι αρνητικοί και οι άλλοι δύο θετικοί θα έχουμε ως αποτέλεσμα θετικό αριθμό.

(β) Είναι

$\alpha+|\alpha-\beta|+|\gamma-\beta|-\gamma \quad =$

$\alpha-(\alpha-\beta)+(\gamma-\beta)-\gamma \quad =$

$\alpha-\alpha+\beta+\gamma-\beta-\gamma=0$

διότι

$|\alpha-\beta|=-(\alpha-\beta)$ αφού $\alpha-\beta<0$

και

$|\gamma-\beta|=\gamma-\beta$ αφού $\gamma-\beta>0$

14071, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2023

(α) Η αλγεβρική παράσταση Κ, που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

A. $K=|x+1|+|x-2|$

Β. $K=|x-1|+|x+2|$

Γ. $K=(|x|+1)+(|x|-2)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

(β) Αν είναι $K=|x+1|+|x-2|$ τότε:

(i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Κ όταν $x=\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

(ii) Αν $x>2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση Κ και να αποδείξετε ότι $K>3$.

(Μονάδες 10)

Λύση:

(α) Η απόσταση του αριθμού x από τον αριθμό 2 επάνω στον άξονα είναι $|x-2|$. Όμοια η απόσταση του x από τον -1 είναι $|x+1|$. Το άθροισμα αυτών των αποστάσεων είναι

$K=|x+1|+|x-2|$

Επομένως η σωστή απάντηση είναι η Α.

(β) (i) Κάνουμε αντικατάσταση του $x=\frac{3}{2}$ στην παραπάνω σχέση:

$K=|x+1|+|x-2| =$

$\left|\frac{3}{2}+1\right|+\left|\frac{3}{2}-2\right| =$

$\left|\frac{5}{2}\right|+\left|-\frac{1}{2}\right| =$

$\frac{5}{2}+\frac{1}{2} =$

$\frac{6}{2}=3$

(β) (ii) Είναι

$x>2 \Leftrightarrow x+1>3$

επομένως

$|x+1|=x+1$

Ακόμα

$x>2 \Leftrightarrow x-2>0$

επομένως

$|x-2|=x-2$

Η παράσταση Κ γράφεται

$K=|x+1|+|x-2| =$

$(x+1)+(x-2) =$

$2x-1$.

Τέλος θα υπολογίσουμε το πρόσημό της

$x>2 \Leftrightarrow$

$2x>4 \Leftrightarrow$

$2x-1>3 \Leftrightarrow$

$K>3$.

14801, Απόλυτη τιμή, θέμα 1, 2022

(α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

(i) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$, τότε $\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\delta$

(ii) Για κάθε $\theta\in(0,+\infty)$ ισχύει: $|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$.

(iii) Η εξίσωση $x^3=5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

(iv) Αν ισχύουν $\alpha>0$ και $\Delta<0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

(v) Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,4]$.

x	0	1	1	2	4
y = f(x)	0	1	-1	2	0,5

(Μονάδες 10)

(β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η ανισότητα: $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$

(Μονάδες 15)

<u>Λύση:</u>

(α)

(i) Είναι λάθος (Λ). Π.χ $\{-5<-1 \; και \; -4<-2\}$, όμως $(-5)\cdot(-4)>(-1)\cdot(-2)$.

(ii) Είναι σωστή (Σ).

(iii) Είναι λάθος (Λ). Η εξίσωση έχει μια ρίζα, την $x=\sqrt[3]{5}$.

(iv) Είναι λάθος (Λ). Όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α, δηλαδή θετικό στην προκειμένη περίπτωση, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

(v) Είναι λάθος (Λ). Ο πίνακας αποτελείται και από τα ζεύγη $(1,-1)$ και $(1,1)$ που έχουν την ίδια τετμημένη και διαφορετική τεταγμένη. Δηλαδή υπάρχει ένα x που αντιστοιχεί σε διαφορετικά y .

(β) Είναι ιδιότητα των απολύτων τιμών, παράγραφος 2.3 του σχολικού βιβλίου.

14617, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2022

Δίνεται η ανίσωση $|x-7|<1$ (Σχέση Ι).

(α) Να αποδείξετε ότι $x\in(6,8)$.

(Μονάδες 12)

(β) Αν γνωρίζουμε ότι $k\in(6,8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k}\in(3,4)$.

(Μονάδες 13)

<u>Λύση:</u>

(α) Είναι

$|x-7|<1 \Leftrightarrow$

$-1<x-7<1 \Leftrightarrow$

$-1+7<x-7+7<1+7 \Leftrightarrow$

$6<x<8$

(β) Έχουμε διαδοχικά

$K\in(6,8) \Leftrightarrow$

$6<K<8 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{6}>\frac{1}{K}>\frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\frac{24}{6}>\frac{24}{K}>\frac{24}{8} \Leftrightarrow$

$4>\frac{24}{K}>\frac{24}{8} \Leftrightarrow$

$\frac{24}{K}\in(3,4)$

14572, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2022

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$

Να δείξετε ότι:

(α) $-3<x<-1$

(Μονάδες 10)

(β) $|2x+4|<2$

(Μονάδες 15)

<u>Λύση:</u>

(α) Είναι

$|x+2|<1 \Leftrightarrow$

$-1<x+2<1 \Leftrightarrow$

$-1-2<x+2-2<1-2 \Leftrightarrow$

$-3<x<-1$

(β) Κατασκευάζουμε το ζητούμενο από την προηγούμενη σχέση:

$-3<x<-1 \Leftrightarrow$

$-6<2x<-2 \Leftrightarrow$

$-2<2x+4<2 \Leftrightarrow$

$|2x+4|<2$

Εναλλακτικά

$|x+2|<1 \Leftrightarrow$

$2|x+2|<2\cdot 1 \Leftrightarrow$

$|2(x+2)|<2 \Leftrightarrow$

$|2x+4|<2$

14491, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2022

(α) Να λυθεί η ανίσωση $|y-3|<1$

(Μονάδες 12)

(β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Είναι

$|y-3|<1 \quad \Leftrightarrow$

$-1<y-3<1 \quad \Leftrightarrow$

$2<y<4$

(β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$E=x\cdot y$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις

$1<x<3$ και $2<y<4$

και είναι

$1\cdot 2<x\cdot y<3\cdot 4 \quad \Leftrightarrow$

$2<E<12$

14412, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2022

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha>\beta$, με $\beta>1$ και $\alpha>1$ τότε

(α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}=2$

(Μονάδες 12)

(β) Να δείξετε ότι $\alpha+\beta>\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$

Λύση:

(α) Είναι

$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$,

επομένως

$|\alpha-\beta|=\alpha-\beta$.

Ακόμα

$\alpha>1 \Leftrightarrow 0>1-\alpha$,

επομένως

$|1-\alpha|=-(1-\alpha)=\alpha-1$.

Με την βοήθεια των δύο τελευταίων σχέσεων απλοποιούμε τη παράσταση

$\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\frac{|1-\alpha|}{1-\alpha} \quad =$

$\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}+\frac{1-\alpha}{1-\alpha} \quad =$

$1+1=2$.

(β) Από την υπόθεση έχουμε $\beta>1$ και $\alpha>1$.

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε

$\alpha+\beta>1+1 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha+\beta>2 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha+\beta>\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$,

αφού $2=\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$

13179, Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2021

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1\leq\beta\leq 2$ και $2\leq\alpha\leq 4$

(α)

(i) Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3

(Μονάδες 7)

(ii) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο (i) ερώτημα.

(Μονάδες 7)

(β)

(i) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1\leq\frac{\alpha}{\beta}$

(Μονάδες 5)

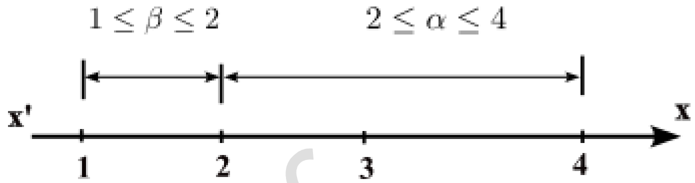
(ii) Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$

(Μονάδες 6)

<u>Λύση:</u>

(α) (ι) Κάνουμε το σχήμα και παρατηρούμε ότι καθώς το β κινείται μεταξύ των 1 και 2 και το α μεταξύ των 2 και 4, την μεγαλύτερη απόσταση την έχουν όταν το α βρίσκεται στο 1 και β στο 4, δηλαδή έχουν τότε απόσταση ίση με 3. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις είναι $d(\alpha,\beta)<3$

Επίσης η απόσταση εξ ορισμού είναι πάντα μη αρνητική, δηλαδή $d(\alpha,\beta)\geq 0$



Επομένως $0\leq d(\alpha,\beta)\leq 3$

(α) (ii) Είναι

$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=\alpha-\beta$, διότι $\alpha\geq\beta$

Τώρα, έχουμε τις παρακάτω σχέσεις

$2\leq\alpha\leq 4$, (Σχέση 1), από την υπόθεση

και

$1\leq\beta\leq 2 \quad\Leftrightarrow$

$-1\geq-\beta\geq-2 \quad\Leftrightarrow$

$-2\leq-\beta\leq-1$, (Σχέση 2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις 1 και 2

$2+(-2)\leq\alpha+(-\beta)\leq 4+(-1) \quad\Leftrightarrow$

$0\leq\alpha-\beta\leq 3 \quad\Leftrightarrow$

$0\leq d(\alpha,\beta)\leq 3$

(β) (i)

(Α) Έχουμε τις σχέσεις

$1\leq\beta\leq 2$, (Σχέση 3), από την υπόθεση.

και

$2 \le \alpha \le 4 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{\alpha} \ge \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4} \le \frac{1}{\alpha} \le \frac{1}{2}$, (Σχέση 4)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις 3 και 4

$1 \cdot \frac{1}{4} \le \beta \cdot \frac{1}{\alpha} \le 2 \cdot \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4} \le \frac{\beta}{\alpha} \le 1$ (Σχέση 5)

(Β) Με ίδιο τρόπο έχουμε

$2 \le \alpha \le 4$, (Σχέση 6), από την υπόθεση

και

$1 \le \beta \le 2 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} \le \frac{1}{\beta} \le 1$, (Σχέση 7)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις 6 και 7 και βρίσκουμε:

$2 \cdot \frac{1}{2} \le \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \le 4 \cdot 1 \quad \Leftrightarrow$

$1 \le \frac{\alpha}{\beta} \le 4$, (Σχέση 8)

Από τις σχέσεις 5 και 8 είναι

$\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta}$

(β) (ii) Από την τελευταία σχέση έχουμε:

$\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta} \quad \Leftrightarrow$

$\left\{ \frac{\beta}{\alpha} \le 1 \, \kappa\alpha\iota \, \frac{\alpha}{\beta} \ge 1 \right\} \quad \Leftrightarrow$

$\left\{ 0 \le 1 - \frac{\beta}{\alpha} \, \kappa\alpha\iota \, \frac{\alpha}{\beta} - 1 \ge 0 \right\}$

Επομένως η σχέση της εκφώνησης γράφεται ισοδύναμα

$\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right| \quad \Leftrightarrow$

$1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \quad \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε $\alpha\beta \ne 0$

$\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha - \beta)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha - \beta = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha = \beta$

Τελικά, αφού

$\{ 1 \le \beta \le 2 \, \kappa\alpha\iota \, 2 \le \alpha \le 4 \, \kappa\alpha\iota \, \alpha = \beta \}$ είναι

$\alpha = \beta = 2$

13177 , Απόλυτη τιμή, θέμα 2, 2021

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$.

(α) Να δείξετε ότι $|\alpha-3|=3-\alpha$ και $|\beta+2|=\beta+2$

(Μονάδες 8)

(β) Να δείξετε ότι $0\leq\alpha+\beta\leq 2$

(Μονάδες 8)

(γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha+\beta|+|\alpha-3|-|\beta+2|$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

Λύση:

(α) Είναι

$2\leq\alpha\leq 3 \quad \Leftrightarrow$

$\{\alpha\geq 2 \, και \, \alpha\leq 3\} \quad \Leftrightarrow$

$\{\alpha-2\geq 0 \, και \, \alpha-3\leq 0\}$

Επομένως

$|\alpha-3|=-(\alpha-3)=3-\alpha$

Ακόμα

$-2\leq\beta\leq -1 \quad \Leftrightarrow$

$\{\beta\geq -2 \, και \, \beta\leq -1\} \quad \Leftrightarrow$

$\{\beta+2\geq 0 \, και \, \beta+1\leq 0\}$

Επομένως

$|\beta+2|=\beta+2$

(β) Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις της υπόθεσης

$2+(-2)\leq\alpha+\beta\leq 3+(-1) \quad \Leftrightarrow$

$0\leq\alpha+\beta\leq 2$

(γ) Από την προηγούμενη σχέση είναι $|\alpha+\beta|=\alpha+\beta$

επομένως

$|\alpha+\beta|+|\alpha-3|-|\beta+2| \quad =$

$\alpha+\beta+3-\alpha-(\beta+2) \quad = \quad \alpha+\beta+3-\alpha-\beta-2=1$

Άλγεβρα Α Λυκείου

Ασκήσεις της Τράπεζας Θεμάτων

Κουμουνδούρος Γιάννης

2.3 Ρίζες πραγματικών αριθμών

37199/2/23	37198/2/23	37197/2/23	37194/2/23	37192/2/23
37172/2/23	36778/2/23	14805/3/23	14849/2/23	34157/2/23
34155/2/23	34152/2/23	15051/2/23	14931/4/22	14774/2/22
14682/2/22	14599/2/22	14452/2/22	12943/2/21	

«Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)».

Οι απαντήσεις τροποποιήθηκαν εν μέρη και επιμελήθηκαν από τον Κουμουνδούρο Γιάννη.

37199, Ρίζες, θέμα 2, 2023

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$

(α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$

(Μονάδες 13)

(β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$

(Μονάδες 12)

Λύση:

(α) Εκτελούμε τις πράξεις

$A-B=(\sqrt{2})^6-(\sqrt[3]{2})^6 =$

$2^{\frac{6}{2}}-2^{\frac{6}{3}} =$

$2^3-2^2 =$

$8-4=4$

(β) Παρατηρούμε ότι

- $(\sqrt{2})^6=2^{\frac{6}{2}}=2^3=8$,
- $1^6=1$,
- $(\sqrt[3]{2})^6=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$

Επομένως

$1<4<8 \iff$

$1^6<(\sqrt[3]{2})^6<(\sqrt{2})^6 \iff$

$1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$

37198, Ρίζες, θέμα 2, 2023

Δίνεται η παράσταση $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

(β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$

(Μονάδες 12)

Λύση:

(α) Πρέπει

$(x-2)^5\geq 0 \iff$

$x-2\geq 0 \iff$

$x\geq 2 \iff$

$x\in[2,+\infty)$

(β) Για $x=4$ είναι

$B=\sqrt[5]{(x-2)^5} =$

$(x-2) =$

$4-2=2$.

Επομένως

$B^2+6B=B^4 \quad \Leftrightarrow$

$2^2+6\cdot 2=2^4 \quad \Leftrightarrow$

$4+12=16 \quad \Leftrightarrow$

$16=16$, που ισχύει πάντα.

37197, Ρίζες, θέμα 2, 2023

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=-3$ να αποδείξετε ότι $A^3+A^2+A+1=0$.

(Μονάδες 12)

<u>Λύση:</u>

(α) Πρέπει

$\{x^2+4\geq 0 \, και \, x-4\geq 0\} \quad \Leftrightarrow$

$\{x\in \mathbb{R} \, και \, x\geq 4\} \quad \Leftrightarrow$

$x\in[4,+\infty)$

(β) Για $x=4$ είναι

$A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4} \quad =$

$\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4} \quad =$

$\sqrt{20}-\sqrt{0} \quad =$

$\sqrt{4\cdot 5} \quad =$

$2\sqrt{5}$.

Επομένως

$A^2-A=(2\sqrt{5})^2-2\sqrt{5} \quad =$

$4\cdot 5-2\cdot\sqrt{5} \quad =$

$20-2\sqrt{5} \quad =$

$2(10-\sqrt{5})$

37194, Ρίζες, θέμα 2, 2023

(α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$

(Μονάδες 12)

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$

(Μονάδες 13)

<u>Λύση:</u>

(α) Είναι

$3<\sqrt[3]{30}<4 \quad \Leftrightarrow$

$3^3<(\sqrt[3]{30})^3<4^3 \quad \Leftrightarrow$

$27<30<64$, που ισχύει.

(β) Είναι

$3<\sqrt[3]{30}<4 \quad \Leftrightarrow$

$-3>-\sqrt[3]{30}>-4 \quad \Leftrightarrow$

$-3+6>-\sqrt[3]{30}+6>-4+6 \quad \Leftrightarrow$

$3>6-\sqrt[3]{30}>2$.

Αφού το $6-\sqrt[3]{30}\in(2,3)$ και το $\sqrt[3]{30}\in(3,4)$, έπεται ότι

$\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30}$.

37192, Ρίζες, θέμα 2, 2023

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$\sqrt{2}\simeq 1{,}41$

$\sqrt{3}\simeq 1{,}73$

$\sqrt{5}\simeq 2{,}24$

$\sqrt{7}\simeq 2{,}64$

(α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$

(Μονάδες 12)

(β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

(Μονάδες 13)

<u>Λύση:</u>

(α) Είναι:

- $\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}\simeq 2\cdot 2{,}24=4{,}48$
- $\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=3\sqrt{5}\simeq 3\cdot 2{,}24=6{,}72$
- $\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}=5\cdot\sqrt{5}=4\cdot 2{,}24=8{,}96$

(β) Έχουμε

$\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}} \quad =$

$\dfrac{3\cdot 2\cdot\sqrt{5}+4\cdot\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}} \quad =$

$\dfrac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad =$

$\dfrac{10}{2}=5$.

37172, Ρίζες, θέμα 2, 2023

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$A=(\sqrt{2})^6, B=(\sqrt[3]{3})^6, \Gamma=(\sqrt[6]{6})^6$

(α) Να αποδείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$.

(Μονάδες 13)

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$

(Μονάδες 12)

<u>Λύση:</u>

(α) Είναι:

$A+B+\Gamma=(\sqrt{2})^6+(\sqrt[3]{3})^6+(\sqrt[6]{6})^6 \quad =$

$(2^{\frac{1}{2}})^6+(3^{\frac{1}{3}})^6+(6^{\frac{1}{6}})^6 \ =$

$2^{\frac{6}{2}}+3^{\frac{6}{3}}+6^{\frac{6}{6}} \ =$

$2^3+3^2+6 \ =$

$8+9+6=23$

(β) Είναι:

$\sqrt[6]{6}<\sqrt[3]{3} \ \Leftrightarrow$

$(\sqrt[6]{6})^6<(\sqrt[3]{3})^6 \ \Leftrightarrow$

$(6^{\frac{1}{6}})^6<(3^{\frac{1}{3}})^6 \ \Leftrightarrow$

$6<3^2 \ \Leftrightarrow$

$6<9$, που ισχύει πάντα.

36778, Ρίζες, θέμα 2, 2023

Δίνεται η παράσταση $K=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}-\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

(β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

<u>Λύση:</u>

(α) Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα όλα τα παρακάτω:

- $x^2+4x+4\geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2\geq 0$, που ισχύει πάντα,
- $x^2-6x+9\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\geq 0$, που ισχύει πάντα,
- $x+2\neq 0 \ \Leftrightarrow \ x\neq -2$,
- $x-3\neq 0 \ \Leftrightarrow \ x\neq 3$,

Επομένως πρέπει

$\{x\neq -2 \ \kappa\alpha\iota \ x\neq 3\}$

(β) Αρχικά έχουμε:

$-2<x<3 \ \Leftrightarrow$

$\{x>-2 \ \kappa\alpha\iota \ x<3\} \ \Leftrightarrow$

$\{x+2>0 \ \kappa\alpha\iota \ x-3<0\}$

Τώρα έχουμε:

$K=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}-\dfrac{x^2-6x+9}{x-3} \ =$

$\dfrac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} \ =$

$\dfrac{|x+2|}{x+2}-\dfrac{|x-3|}{x-3} \ =$

$\dfrac{x+2}{x+2}-\dfrac{x-3}{x-3} \ =$

$1+1=2$.

14805, Ρίζες, θέμα 3, 2023

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει
$\alpha=|3\sqrt{2}-4|+2|\sqrt{2}-2|$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2}=1{,}41$)

(Μονάδες 10)

(β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3=2\alpha$

(Μονάδες 5)

(γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A=\alpha^3+(\alpha-1)^2$

(Μονάδες 10)

Λύση:

(α) Λαμβάνοντας υπόψιν ότι:

$3\sqrt{2}-4=3\cdot1{,}41-4=4{,}23-4=0{,}23>0$

έχουμε ότι

$|3\sqrt{2}-4|=3\sqrt{2}-4$

Όμοια

$\sqrt{2}-2=1{,}41-2<0$

επομένως

$|\sqrt{2}-2|=2-\sqrt{2}$

Τώρα έχουμε

$\alpha=|3\sqrt{2}-4|+2|\sqrt{2}-2|$ =

$3\sqrt{2}-4+2(2-\sqrt{2})$ =

$3\sqrt{2}-4+4-2\sqrt{2}$ =

$\sqrt{2}$

(β) Έχουμε

$\alpha^3=2\alpha$ ⇔

$(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$ ⇔

$(\sqrt{2})^{3\cdot2}=(2\sqrt{2})^2$ ⇔

$2^{\frac{6}{2}}=4\cdot2$ ⇔

$2^3=8$ ⇔

$8=8$, που ισχύει

(γ) Έχουμε

$A=\alpha^3+(\alpha-1)^2$ =

$2\alpha+\alpha^2-2\alpha+1$ =

α^2+1 =

$(\sqrt{2})^2+1$ =

$2+1=3$.

14849, Ρίζες, θέμα 2, 2023

(α) Να αποδείξετε ότι $2<\sqrt{5}$.

(Μονάδες 7)

(β) Να αποδείξετε ότι $(2-\sqrt{5})^2=9-4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 10)

(γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$.

(Μονάδες 8)

Λύση:

(α) Είναι

$2<\sqrt{5} \iff$

$2^2<(\sqrt{5})^2 \iff$

$4<5$, που ισχύει

(β) Έχουμε

$(2-\sqrt{5})^2=2^2-2\cdot2\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2 =$

$4-4\sqrt{5}+5 =$

$9-4\sqrt{5}$

(γ) Έχουμε

$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} =$

$|2-\sqrt{5}| =$

$-(2-\sqrt{5}) =$

$\sqrt{5}-2$

34157, Ρίζες, θέμα 2, 2023

Αν είναι $A=2-\sqrt{3}, B=2+\sqrt{3}$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$

(Μονάδες 12)

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Είναι

$A\cdot B=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) =$

$2^2-(\sqrt{3})^2 =$

$4-3=1$

(β) Έχουμε

$\Pi=A^2+B^2 =$

$(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2 =$

$4-4\sqrt{3}+3+4+4\sqrt{3}+3=14$

34155, Ρίζες, θέμα 2, 2023

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot\Gamma=\sqrt{15}$.

(Μονάδες 15)

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β.

(Μονάδες 10)

Λύση:

(α) Είναι:

$A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} \ =$

$5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} \ =$

$3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \ =$

$3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{6}} \ =$

$3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \ =$

$15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15}$

(β) Έχουμε

$A = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

και

$B = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$.

Επομένως

$25 < 27 \ \Leftrightarrow$

$\sqrt[6]{26} < \sqrt[6]{27} \ \Leftrightarrow$

$A < B$

34152, Ρίζες, θέμα 2, 2023

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A;

(Μονάδες 07)

(β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B;

(Μονάδες 08)

(γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

(Μονάδες 10)

Λύση:

(α) Πρέπει $(x-2)^2 \geq 0$ που ισχύει πάντα, επομένως η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Πρέπει:

$(2-x)^3 \geq 0 \ \Leftrightarrow$

$2 - x \geq 0 \ \Leftrightarrow$

$x \leq 2$

Δηλαδή η παράσταση B ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty, 2]$.

(γ) Για $x \leq 2$ είναι $x - 2 \leq 0$, επομένως:

$A = \sqrt{(x-2)^2} \ =$

$|x-2| \ =$

$-(x-2) \ =$

$2 - x$.

Ακόμα, αφού $2 - x \geq 0$ είναι:

$B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2 - x$

Επομένως

$A=B$

15051, Ρίζες, θέμα 2, 2023

(α) Να αποδείξετε ότι $(2-\sqrt{5})^2=9-4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2+\sqrt{5})^2$

(Μονάδες 12)

(β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9-4\sqrt{5}$ και $9+4\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Είναι

$(2-\sqrt{5})^2=2^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot 2+(\sqrt{5})^2 \quad =$

$4-4\sqrt{5}+5 \quad =$

$9-4\sqrt{5}$

Ακόμη

$(2+\sqrt{5})^2=4+4\sqrt{5}+5 \quad =$

$9+4\sqrt{5}$

(β) Είναι

$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} \quad =$

$|2-\sqrt{5}| \quad =$

$-(2-\sqrt{5}) \quad =$

$\sqrt{5}-2$

και ακόμη

$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{(2+\sqrt{5})^2} \quad =$

$|2+\sqrt{5}| \quad =$

$2+\sqrt{5}$.

14931, Ρίζες, θέμα 4, 2022

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha=1+\sqrt{2}$ και $\beta=1-\sqrt{2}$

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\alpha^2-\beta^2$

(Μονάδες 7)

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B=\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

(γ) Αν $A=4\sqrt{2}$ και $B=2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}>\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}$

(Μονάδες 10)

Λύση:

(α) Είναι

$\alpha^2=(1+\sqrt{2})^2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$, (Σχέση 1)

ακόμη

$\beta^2=(1-\sqrt{2})^2=1-2\sqrt{2}+2=3-2\sqrt{2}$, (Σχέση 2)

Επομένως από τις σχέσεις 1 και 2 είναι

$\alpha^2-\beta^2=3+2\sqrt{2}-(3-2\sqrt{2}) \quad =$

$3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(β) Έχουμε

$B=\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\beta^2} \quad =$

$\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} \quad =$

$|1+\sqrt{2}|-|1-\sqrt{2}| \quad =$

$1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})=2$.

Παραπάνω λάβαμε υπόψιν ότι $1+\sqrt{2}>0$ και $1-\sqrt{2}<0$

(γ) Έχουμε ισοδύναμα

$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}>\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2} \quad \Leftrightarrow$

$\sqrt{A}>\sqrt{B} \quad \Leftrightarrow$

$\sqrt{4\sqrt{2}}>2 \quad \Leftrightarrow$

$(\sqrt{4\sqrt{2}})^2>2^2 \quad \Leftrightarrow$

$4\sqrt{2}>4 \quad \Leftrightarrow$

$(4\sqrt{2})^2>4^2 \quad \Leftrightarrow$

$16\cdot 2>16 \quad \Leftrightarrow$

$32>16$, που ισχύει

14774, Ρίζες, θέμα 2, 2022

(α) Να δείξετε ότι $(2+\sqrt{5})^2=9+4\sqrt{5}$ και $(1-\sqrt{5})^2=6-2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

(β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=1+2\sqrt{5}$.

(Μονάδες 12)

Λύση:

(α) Είναι

$(2+\sqrt{5})^2=4+4\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2 \quad =$

$4+4\sqrt{5}+5 \quad =$

$9+4\sqrt{5}$

Ακόμα

$(1-\sqrt{5})^2=1-2\sqrt{5}+5 \quad =$

$6-2\sqrt{5}$

(β) Έχουμε

$\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}} \quad =$

$\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} \quad =$

$|2+\sqrt{5}|+|1-\sqrt{5}| \quad =$

$2+\sqrt{5}-1+\sqrt{5} \quad =$

$1+2\sqrt{5}$.

14682, Ρίζες, θέμα 2, 2022

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{3})^6$ και $B=(\sqrt[3]{3})^6$

(α) Να δείξετε ότι: $A-B=18$

(Μονάδες 12)

(β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Είναι

$A-B=(\sqrt{3})^6-(\sqrt[3]{3})^6 =$

$3^{\frac{6}{2}}-3^{\frac{6}{3}} =$

$3^3-3^2 =$

$27-9=18$

(β) Παρατηρούμε ότι

$\sqrt[3]{3}<\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$(\sqrt[3]{3})^6<(\sqrt{3})^6 \Leftrightarrow$

$3^{\frac{6}{3}}<3^{\frac{6}{2}} \Leftrightarrow$

$3^2<3^3 \Leftrightarrow$

$9<27$, που ισχύει

Επομένως

$\sqrt[3]{3}<\sqrt{3}$

14599, Ρίζες, θέμα 2, 2022

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x|<2$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $-1<x<1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει $x^2<1$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|2x|<2 \Leftrightarrow$

$2|x|<2 \Leftrightarrow$, διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2

$|x|<1 \Leftrightarrow$

$-1<x<1$

(β) Έχουμε

$x^2<1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2}<\sqrt{1} \Leftrightarrow$

$|x|<1 \Leftrightarrow$

$-1<x<1 \Leftrightarrow$

$x\in(-1,1)$

14452, Ρίζες, θέμα 2, 2022

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-1 \, και \, \beta=\sqrt{3}+1$

(α) Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=10$.

(Μονάδες 15)

(β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5$

(Μονάδες 10)

Λύση:

(α) Κάνουμε τις πράξεις στο πρώτο μέλος:

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \ =$

$(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}+1)^2 \ =$

$(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2+(\sqrt{3})^2-1^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1^2 \ =$

$3-2\sqrt{3}+1+3-1+3+2\sqrt{3}+1 \ = \ 10$

(β) Έχουμε ότι

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5 \ \Leftrightarrow$, πολλαπλασιάζουμε με $\alpha\cdot\beta\neq 0$

$\alpha\beta\frac{\beta}{\alpha}+\alpha\beta\frac{\alpha}{\beta}+\alpha\beta=5\alpha\beta \ \Leftrightarrow$

$\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta=5\alpha\beta \ \Leftrightarrow$

$10=5(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) \ \Leftrightarrow$

$10=5((\sqrt{3})^2-1^2) \ \Leftrightarrow$

$10=5\cdot 2 \ \Leftrightarrow$

$10=10$. που ισχύει πάντα

Αλλιώς:

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5 \ =$

$\frac{\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha\beta} \ =$

$\frac{10}{2}=5$

12943, Ρίζες, θέμα 2, 2021

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ και $\beta=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

(α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$

(Μονάδες 12)

(β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$

(Μονάδες 13)

Λύση:

(α) Είναι:

$\alpha+\beta=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})+\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \ =$

$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}) \ =$

$\frac{1}{2}\cdot 6=3$

Ακόμα

$\alpha\cdot\beta=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\cdot\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \ =$

$\frac{1}{4}(3^2-(\sqrt{5})^2) \ =$

$\frac{1}{4}(9-5) \ =$

$\frac{1}{4}\cdot 4=1$

(β) Έχουμε

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \iff$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \iff$

$\alpha^2+\beta^2=3^2-2\cdot 1 \iff$

$\alpha^2+\beta^2=9-2 \iff$

$\alpha^2+\beta^2=7$.