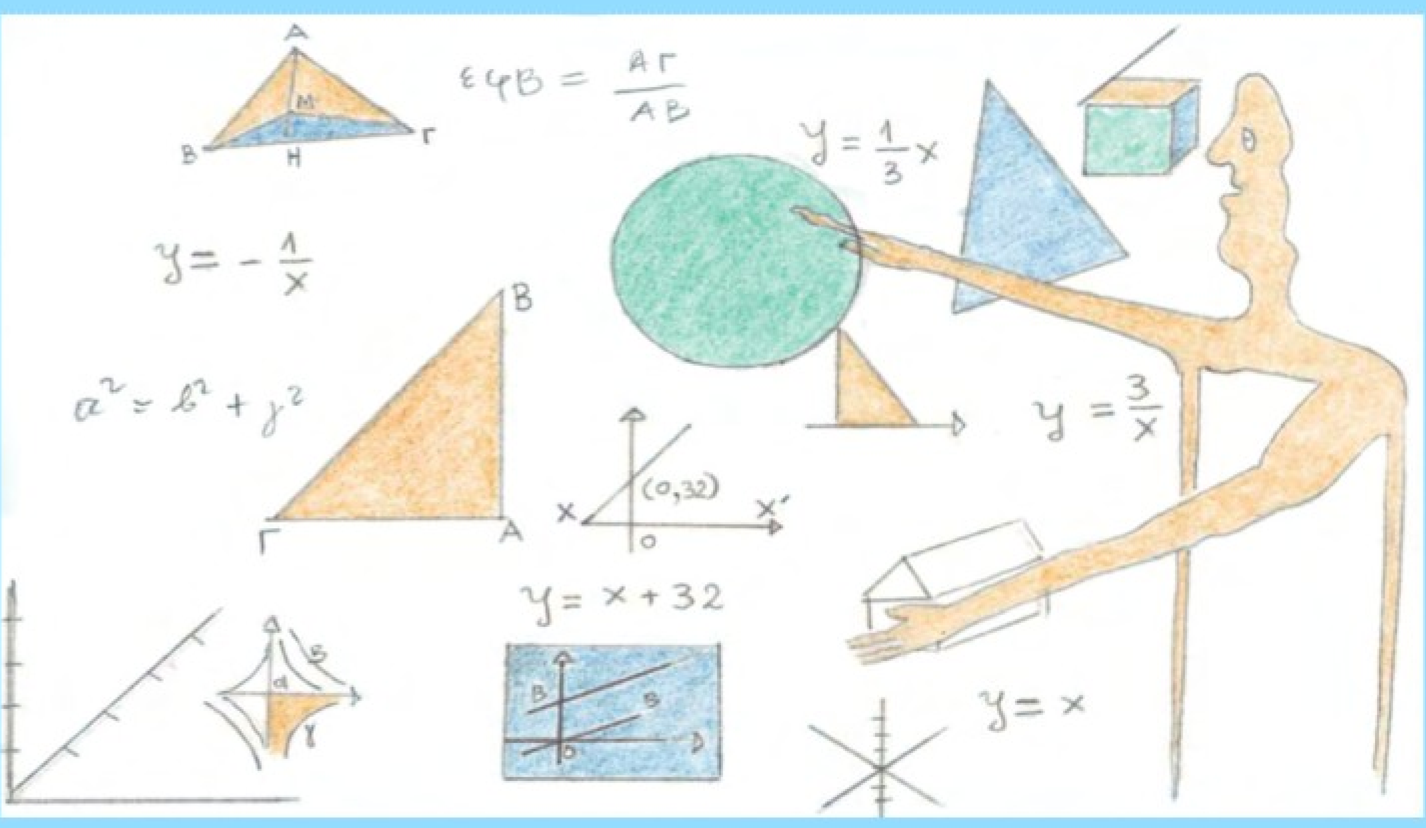
Μαθηματικά Β Γυμνασίου

Κουμουνδούρος Γιάννης



Θεωρία και Ασκήσεις

Μέρος Α

Εκδόσεις johnkscience

Μαθηματικά Β Γυμνασίου

Κουμουνδούρος Γιάννης

Θεωρία και Ασκήσεις

Μέρος Α

Εκδόσεις johnkscience

Πίνακας περιεχομένων

Βασικές Πράξεις και Έννοιες

Θεωρία

1) Το σύνολο $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ περιέχει τους **φυσικούς** αριθμούς.

2) Το σύνολο $\mathbb{Z}=\{\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ περιέχει τους **ακέραιους** αριθμούς.

3) Οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν με την μορφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$ με $\nu\neq0$ ονομάζονται **ρητοί** αριθμοί και το σύνολο που τους περιέχει συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.

4) Ο αριθμοί που δεν είναι ρητοί ονομάζονται **άρρητοι**, παραδείγματα τέτοιων αριθμών είναι το $\pi=3.14\ldots$, $e=2{,}718\ldots$, $\sqrt{2}$, κτλ

5) Το σύνολο όλων των παραπάνω αριθμών ονομάζεται σύνολο των **πραγματικών αριθμών** περιέχει δηλαδή τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς. Συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.

6) Ο **άξονας** των πραγματικών αριθμών είναι μία ευθεία (χωρίς αρχή και τέλος). Η ευθεία αυτή αποτελείται από διαδοχικά σημεία το ένα δίπλα στο άλλο. Κάθε σημείο αναπαριστά και έναν πραγματικό αριθμό. Αφού τα σημεία της ευθείας είναι άπειρα, θα είναι άπειροι και οι αριθμοί. Το σημείο με τον αριθμό μηδέν 0 ονομάζεται **αρχή** του άξονα. Ο άξονας αυτός έχει προσανατολισμό, που είναι ένα βέλος που γράφουμε προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί αυξάνονται προς στα δεξιά. Αυτό ονομάζεται και διάταξη.

7) Αλγεβρικά η **απόλυτη τιμή ενός** αριθμού ορίζεται ώς:
$$|x|=\left\{\begin{matrix} x\,,\alpha\nu\, x\geq0 \\ -x\,,\alpha\nu\, x<0\end{matrix}\right\} ,$$
ενώ γραφικά είναι η **απόσταση** του αριθμού από το μηδέν (την αρχή του άξονα).

8) Για κάθε αριθμό είναι $|x|\geq0$

9) Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ονομάζεται **άθροισμα** ενώ οι αριθμοί που προσθέτουμε ονομάζονται **προσθετέοι** ή **όροι**.

10) **Για να προσθέσουμε δύο αριθμούς** παίρνουμε πρόσημο από τον αριθμό με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και εάν οι αριθμοί είναι ομόσημοι τους προσθέτουμε ενώ εάν είναι ετερόσημοι τους αφαιρούμε.

11) Η πρόσθεση έχει τις παρακάτω ιδιότητες: (**ιδιότητες της πρόσθεσης**)

    i. **Αντιμεταθετική** ιδιότητα η οποία με λέει ότι δεν έχει σημασία με ποια σειρά θα προσθέσουμε τους δύο προσθετέους, έχει τύπο: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

    ii. **Προσεταιριστική** ιδιότητα που μας λέει ότι εάν έχουμε τρεις προσθετέους μπορούμε να τους προσθέσουμε με όποια σειρά θέλουμε, με τύπο $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

    iii. **Ουδέτερο στοιχείο**, που είναι ο αριθμός μηδέν, οποίος όταν προστεθεί σε οποιαδήποτε άλλον αριθμό δίνει πάλη τον ίδιο αριθμό. Έχει τύπο $\alpha+0=\alpha$.

    iv. Ο **αντίθετος** ενός αριθμού α είναι ο $-\alpha$ με την ιδιότητα $\alpha+(-\alpha)=0$.

12) Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ονομάζεται **γινόμενο** ενώ οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε ονομάζονται **παράγοντες**.

13) **Για να κάνουμε πολλαπλασιασμό** υπολογίζουμε αρχικά το πρόσημο. Αν οι παράγοντες είναι ομόσημοι τότε παίρνουμε θετικό πρόσημο ενώ εάν οι παράγοντες είναι ετερόσημοι τότε παίρνουμε αρνητικό πρόσημο. Τέλος κάνουμε κανονικά τον πολλαπλασιασμό.

14) Ο πολλαπλασιασμός έχει τις παρακάτω ιδιότητες.(**Ιδιότητες του πολ/σμού**)

i. **Αντιμεταθετική** ιδιότητα η οποία με λέει ότι δεν έχει σημασία με ποια σειρά θα πολλαπλασιάσουμε τους δύο παράγοντες, έχει τύπο: $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$.

ii. **Προσεταιριστική** ιδιότητα που μας λέει ότι εάν έχουμε τρεις παράγοντες μπορούμε να τους πολλαπλασιάσουμε με όποια σειρά θέλουμε, με τύπο $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.

iii. **Ουδέτερο στοιχείο**, που είναι ο αριθμός 1, οποίος όταν πολλαπλασιαστεί σε οποιαδήποτε άλλον αριθμό δίνει πάλη τον ίδιο αριθμό. Έχει τύπο $\alpha\cdot 1=\alpha$.

iv. Ο **αντίστροφος** ενός αριθμού α είναι ο $\frac{1}{\alpha}$ με την ιδιότητα $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$.

15) Η **επιμεριστική ιδιότητα** είναι κοινή ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης. Αλγεβρικά γράφουμε: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$. Ακόμα έχουμε $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$ κ.τ.λ.

16) Προσοχή πρέπει να δίνουμε όταν έχουμε διαιρέσεις

i. $(\alpha\pm\beta):\gamma=\alpha:\gamma\pm\beta:\gamma$ ή $\frac{\alpha\pm\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}\pm\frac{\beta}{\gamma}$

ii. Δεν επιτρέπεται η $\gamma:(\alpha\pm\beta)=\gamma:\alpha\pm\gamma:\beta$

17) Για να υπολογίσουμε τον αντίθετο (x) ενός αριθμού (α) αρκεί να λύσουμε την εξίσωση: $\alpha+x=0$. Ενώ για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο (x) ενός αριθμού (α) αρκεί να λύσουμε την εξίσωση: $\alpha\cdot x=1$.

18) **Οι πράξεις είναι δύο**: η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός. Ορίζουμε την αφαίρεση και την διαίρεση με την βοήθεια των δύο παραπάνω.

19) Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης $\alpha-\beta$ ονομάζεται **διαφορά** ενώ οι δύο αριθμοί που αφαιρούμε ονομάζονται **μειωτέος** ο πρώτος (α) και **αφαιρετέος** ο δεύτερος (β). Για να κάνουμε αφαίρεση προσθέτουμε στην μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου: $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

20) Το αποτέλεσμα τη διαίρεσης $\frac{\alpha}{\beta}$ ονομάζεται και **λόγος**, συμβολίζεται δε με την μορφή κλάσματος. Ο αριθμητής του κλάσματος (α) είναι ο **διαιρετέος** ενώ ο παρανομαστής (β) είναι ο **διαιρέτης**. Για να κάνουμε διαίρεση πολλαπλασιάζουμε στον διαιρετέο τον αντίστροφο του διαιρέτη: $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$. Εάν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της **Ευκλείδειας διαίρεσης** θα υπολογίζουμε το **πηλίκο** (π) και το **υπόλοιπο** (υ). Ισχύει η ιδιότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $\alpha=\beta\cdot\pi+\upsilon$.

21) **Κλάσμα** είναι ένας αριθμός της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\beta\neq 0$. Το α ονομάζεται αριθμητής και το β παρανομαστής.

22) **Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα** διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του αριθμητή και του παρανομαστή. Το κλάσμα που δεν απλοποιείται περισσότερο ονομάζεται **ανάγωγο**.

23) **Για να προσθέσουμε δύο κλάσματα** πρέπει να είναι ομώνυμα δηλαδή να έχουν ίδιο παρανομαστή. Για να κάνουμε δύο κλάσματα ομώνυμα χρησιμοποιούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δύο παρανομαστών. Για να ολοκληρώσουμε την πρόσθεση πρέπει να προσθέσουμε τους δύο αριθμητές και να βάλουμε σαν παρανομαστή τον κοινό παρανομαστή των δύο κλασμάτων.

24) **Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα** πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και τους παρανομαστές των δύο κλασμάτων.

25) **Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα** αλλάζουμε την διαίρεση σε πολλαπλασιασμό και αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα.

26) **Λόγος** δύο αριθμών είναι το κλάσμα $\frac{x}{y}$ με $y\neq 0$.

27) **Αναλογία** είναι η ισότητα δύο λόγων: $\frac{x}{y}=\frac{\varphi}{\omega}$, $x\cdot\omega\neq 0$, οι αριθμητές ονομάζονται και **ηγούμενοι όροι** ενώ οι παρανομαστές και **επόμενοι όροι**. Ακόμα τα x και ω ονομάζονται **άκροι** και οι y και φ **μέσοι όροι**.

28) Οι αναλογίες έχουν τις παρακάτω **ιδιότητες**:

i. $\frac{x}{y}=\frac{\varphi}{\omega}\Leftrightarrow x\cdot\omega=y\cdot\varphi$

ii. $\frac{x}{y}=\frac{\varphi}{\omega}\Leftrightarrow\frac{\omega}{y}=\frac{\varphi}{x}$ ή $\frac{x}{\varphi}=\frac{y}{\omega}$ ή $\frac{\omega}{\varphi}=\frac{y}{x}$ δηλαδή μετακινώ τις μεταβλητές διαγώνια.

iii. $\frac{x}{y}=\frac{\varphi}{\omega}\Leftrightarrow\frac{x\pm y}{y}=\frac{\varphi\pm\omega}{\omega}$ ή $\frac{x}{y\pm x}=\frac{\varphi}{\omega\pm\varphi}$ δηλαδή προσθέτω τους αριθμητές ή τους παρανομαστές.

iv. $\frac{x}{y}=\frac{\varphi}{\omega}=\frac{x+\varphi}{y+\omega}$

29) Οι πράξει γίνονται με την παρακάτω **προτεραιότητα**:

i. Παρενθέσεις

ii. Απόλυτες τιμές

iii. Δυνάμεις

iv. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις

v. Προσθέσεις και αφαιρέσεις

30) Δύο αριθμοί ονομάζονται **ομόσημοι** όταν έχουν ίδιο πρόσημο, ισχύει $\alpha\cdot\beta>0$ και $\frac{\alpha}{\beta}>0,\beta\neq 0$. Ενώ ονομάζονται **ετερόσημοι** όταν έχουν αντίθετο πρόσημο, ισχύει ότι $\alpha\cdot\beta<0$ και $\frac{\alpha}{\beta}<0,\beta\neq 0$

31) Το **μηδέν** (0) δεν έχει πρόσημο, ούτε αντίθετο και αντίστροφο. Ότι πολλαπλασιάζουμε με το μηδέν δίνει αποτέλεσμα μηδέν και ότι προσθέτουμε με το μηδέν δίνει ως αποτέλεσμα τον ίδιο τον αριθμό που προσθέτουμε.

32) Όταν μπροστά από μία παρένθεση υπάρχει το – τότε βγάζουμε την παρένθεση αλλάζοντας όλα τα πρόσημα μέσα στην παρένθεση.

33) Το γινόμενο άρτιου πλήθους παραγόντων έχει θετικό πρόσημο ενώ το γινόμενο περιττού πλήθους παραγόντων έχει αρνητικό πρόσημο.

34) Ένας δεκαδικός αριθμός με άπειρο αριθμό δεκαδικών ψηφίων όπου ένα τμήμα αυτών των ψηφίων επαναλαμβάνεται ονομάζεται απειροψήφιος περιοδικός δεκαδικός αριθμός ή απλά **περιοδικός αριθμός**, π.χ. $0.34565656...=0.34\overline{56}$ Οι αριθμοί αυτοί είναι ρητοί και μπορούν να γραφούν με την μορφή κλάσματος. Για να γίνει η μετατροπή σε κλάσμα ακολουθούμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

i. Έστω α ο περιοδικός αριθμός

ii. Εντοπίζουμε το πρώτο και το δεύτερο μέρος της περιόδου.

iii. Πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλες δυνάμεις του 10 ώστε η υποδιαστολή να βρεθεί μπροστά από το πρώτο και το δεύτερο μέρος της περιόδου.

iv. Αφαιρούμε τις δύο σχέσεις

35) Ακολουθεί ένα παράδειγμα μετατροπής του αριθμού 0.3456565656…

i. Έστω α=0.34565656…

ii. Η περίοδος είναι το 56 και πρώτη φορά εμφανίζεται στο 0.34565656… και δεύτερη φορά στο 0.34565656…

iii. Πολλαπλασιάζουμε με 100 και 10000 αντίστοιχα: $100\alpha = 34.565656\ldots$ και $10000\alpha = 3456.565656\ldots$

iv. Αφαιρούμε κατά μέλη αυτές τις δύο σχέσεις: $10000\alpha - 100\alpha = 3422$ ή $9900\alpha = 3422$ ή $\alpha = \frac{3422}{9900}$

36) Για να υπολογίσουμε τον **μέσο όρο** ή **μέση τιμή** ενός πλήθους δεδομένων αρκεί να τα προσθέσουμε και να διαιρέσουμε με το πλήθος τους, π.χ. αν στο μάθημα των μαθηματικών έχετε πάρει τους βαθμούς 13, 15, 12, 14 και 15 τότε η μέση τιμή αυτών των βαθμολογιών είναι $\frac{13+15+12+14+15}{5} = \frac{12\cdot 1 + 13\cdot 1 + 14\cdot 1 + 15\cdot 2}{5} = \frac{69}{5} = 13.8$

37) Σε κάθε σημείο ενός άξονα έχουμε αντιστοιχίσει και έναν αριθμό, που η απόλυτή του τιμή είναι η απόσταση του σημείου από την αρχή. Τον αριθμό αυτό μπορούμε να τον ονομάζουμε **θέση** και την απόλυτη τιμή του **μέτρο** της θέσης. Έτσι εάν ένα αυτοκίνητο βρίσκεται κάποια χρονική στιγμή σε κάποιο σημείο του άξονα, το σημείο αυτό θα το ονομάζουμε θέση του αυτοκινήτου, π.χ. εάν είναι βρίσκεται στον αριθμό -3 θέση του είναι $x = -3$ και απέχει από το μηδέν $|-3| = 3$ μονάδες. Αργότερα θα δούμε ότι η θέση είναι ένα διάνυσμα (βέλος) που έχει αρχή το σημείο αναφοράς (αρχή του άξονα) και πέρας το σημείο στο οποίο βρίσκεται το αυτοκίνητο. Τα διανύσματα έχουν μέτρο (=μήκος), διεύθυνση (=ευθεία) και φορά (=προσανατολισμός).

38) Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα αυτοκίνητο βρίσκεται αρχικά στην θέση Ο(0km). Βλέπε το σχήμα στην σελίδα 15 του σχολικού. Το αυτοκίνητο μετακινείται προς τα αριστερά στην θέση Β(-4km) και μετά προς τα δεξιά στην θέση Γ(5Km). Το συνολικό **διάστημα** που έχει διανύσει το όχημα είναι η συνολική απόσταση που έχει κάνει σε όλη την διαδρομή, δηλαδή 4km προς τα αριστερά και 9km προς τα δεξιά, συνολικά 13km. Το διάστημα είναι μονόμετρο μέγεθος.

39) Στο παραπάνω παράδειγμα αν το όχημα ξεκινούσε από την αρχική θέση Ο(0km) και κατευθυνόταν κατευθείαν προς την τελική θέση Γ(5km) τότε θα έκανε μόνο 5km. Αυτό είναι το μέτρο της **μετατόπισης**. Αργότερα θα δούμε ότι η μετατόπιση είναι ένα διανυσματικό μέγεθος (βέλος) που έχει αρχή το σημείο όπου ξεκινάει την κίνηση το όχημα και τέλος το σημείο όπου τελειώνει την κίνηση το όχημα.

40) Η έκφραση $x\cdot y \neq 0$ σημαίνει ότι το $x \neq 0$ και ταυτόχρονα το $y \neq 0$

41) Η έκφραση $x\cdot y > 0$ σημαίνει ότι οι αριθμοί x και y είναι ομόσημοι.

42) Η έκφραση $x\cdot y < 0$ σημαίνει ότι οι αριθμοί x και y είναι ετερόσημοι.

43) Η έκφραση $x\cdot y = 0$ σημαίνει ότι $x = 0$ ή $y = 0$.

Μάθημα 1 – Βασικές Πράξεις

Άσκηση 1. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Τι ονομάζουμε θετικούς και τι αρνητικούς αριθμούς;

ii. Πώς γίνεται η πρόσθεση;

iii. Πώς γίνετε η αφαίρεση;

Άσκηση 2. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $3+5$

ii. $-3+5$

iii. $3-5$

iv. $-3-5$

Άσκηση 3. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2\cdot 5$,

ii. $-2\cdot 5$,

iii. $-2\cdot(-5)$,

iv. $2\cdot(-5)$

Άσκηση 4. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2+4+5$,

ii. $2-4+5$,

iii. $-2-4+5$,

iv. $-2-4-5$,

v. $2+4-5$

Άσκηση 5. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$,

ii. $\frac{2}{-4}\cdot\frac{-5}{-4}$

Άσκηση 6. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$,

ii. $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}$

iii. $\frac{5}{3}-\frac{4}{6}-\frac{4}{9}$

Άσκηση 7. Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

i. $2(3+4)$,

ii. $-2(3+4)$

iii. $-2(-3+4)$

iv. $-2(-3-4)$

Άσκηση 8. Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

i. $2(3-4)$,

ii. $(-2+3)(1-2)$,

iii. $(2-3)(-2-3+4)$

Άσκηση 9. Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

i. $2(3-4)$,

ii. $(-2+3)(1-2)$,

iii. $(\mathbf{2-3})(\mathbf{-2-3+4})$

Άσκηση 10. Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

i. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$,

ii. $-\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{6}+\frac{3}{9}\right)$

iii. $\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{3}\right)$

Άσκηση 11. Ποια είναι η προτεραιότητα των πράξεων;

Άσκηση 12. Να κάνετε τις πράξεις με την σωστή σειρά

i. $2\cdot5-3(5-6)$

ii. $2\cdot(-3)-(-4)\cdot(-3)$

iii. $-3\cdot(-4)-[(-2+3\cdot(-2))-6]$

iv. $[(-1)(-2)(-3)]+[-1-2-3]$

Μάθημα 2 – Βασικές Πράξεις

Άσκηση 13. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή;

ii. Τι πρόσημο έχει η απόλυτη τιμή;

iii. Ποιοι είναι οι αντίθετοι αριθμοί;

iv. Ποιοι είναι οι ετερόσημοι αριθμοί;

Άσκηση 14. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $|-2|$

ii. $|-2+4|$

iii. $-2+|-2|$

iv. $-|-2-1|$

Άσκηση 15. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $-2\cdot|-2|-(-2)\cdot(-3)$,

ii. $-3\cdot(-3)+|-2|-1$,

iii. $-2\cdot(-2-3+4)$,

iv. $-4\cdot(-2\cdot|-3|-2)$

Άσκηση 16. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $-[-2-3(-3+4\cdot2)-2]-2$,

ii. $2-[-3\cdot(-4)-(-2)-1]+5$,

iii. $(-1)\cdot(-1)$,

iv. $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$,

v. $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$

Άσκηση 17. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1$,

ii. $\frac{2}{-4}-\frac{-5}{-4}$

Άσκηση 18. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{1}{2}-\frac{-3}{4}$,

ii. $\frac{-1}{-2}-\frac{3}{-5}$

iii. $-2\cdot\left(\frac{-2}{3}-\frac{4}{2}\right)$

Άσκηση 19. Να κάνετε τις πράξεις.

i. $\frac{2}{3}:\frac{3}{2}$,

ii. $\frac{2}{3}:3$

iii. $3:\frac{2}{3}$

Άσκηση 20. Να κάνετε τις πράξεις.

i. $3:\frac{3}{2-1}$,

ii. $\frac{3}{5-3}:\frac{4-5}{6-1}$,

iii. $\frac{4}{4-6}\cdot\frac{3-5}{8}$

Άσκηση 21. Να κάνετε τις πράξεις.

i. $\frac{\frac{3}{4}:\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}:\frac{2}{5}}+\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right):\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}:\left(-\frac{1}{2}\right)}$

Άσκηση 22. Να τοποθετήσετε πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους παρακάτω αριθμούς.

$1\ ,\ -1\ ,\ 2\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ |-2|\ ,\ -2\ ,\ \frac{3}{4}:\frac{3}{4}$

Άσκηση 23. Ποιο είναι το πρόσημο του αποτελέσματος της απόλυτης τιμής;

Άσκηση 24. Αν $|x|=2$ να βρείτε ποιος αριθμός/μοι μπορεί να είναι το x.

Άσκηση 25. Αν $|x|=-2$ να βρείτε ποιος αριθμός/μοι μπορεί να είναι το x.

Μάθημα 3 – Βασικές Πράξεις

Άσκηση 26. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης;

ii. Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού;

iii. Ποιοι είναι οι ομόσημοι αριθμοί;

iv. Ποιοι είναι οι ετερόσημοι αριθμοί;

Άσκηση 27. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $|-1|-|-1|$

ii. $-2\cdot|-2+4|+3\cdot|-1-3|$

iii. $-[-2+|-2|-(-2\cdot|-2|)]+1$

iv. $-(-|-2|-1)$

Άσκηση 28. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2(-3+4)-(-2-3\cdot(-2))$

ii. $2[-1-2(-3+4)]-[-2-3(-2)]$

iii. $2\cdot2\cdot2-2\cdot3\cdot4$

Άσκηση 29. Να διαλέξετε την σωστή απάντηση:

i. Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι θετικό τότε οι αριθμοί είναι (α) ομόσημοι (β) ετερόσημοι.

ii. Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι αρνητικό τότε οι αριθμοί είναι (α) ομόσημοι (β) ετερόσημοι.,

Άσκηση 30. Τι πρόσημο έχει το μηδέν;

Άσκηση 31. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $0\cdot0$,

ii. $0\cdot1$,

iii. $(-1)\cdot0$,

iv. $0+1$,

v. $0+0$

vi. $0+(-1)$

vii. $(-2)+0$

viii. $(-1)\cdot2\cdot0+0$

ix. $(-1)+0+1$

Άσκηση 32. Τι είναι ο ρητός αριθμός:

Άσκηση 33. Να μετατρέψετε σε ρητούς του παρακάτω αριθμούς:

i. 5

ii. -5

iii. 2.1

iv. 3.14

v. $|-2|$

vi. $2.\overline{3}$

vii. $23.45\overline{34}$

Άσκηση 34. Ένα γινόμενο από τρεις παράγοντες είναι αρνητικό. Να γράψετε τις πιθανές περιπτώσεις για τα πρόσημα των παραγόντων.

Άσκηση 35. Να βρείτε τους αντίθετους, αν υπάρχουν, των παρακάτω αριθμών: -2 , -3 , 3 , 5 , 0

Άσκηση 36. Να βρείτε τους αντίστροφους, αν υπάρχουν, των παρακάτω αριθμών: -2 , -3 , 3 , 5 , 0

Άσκηση 37. Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι μηδέν, τότε τι μπορείτε να πείτε για αυτούς τους αριθμούς;

Άσκηση 38. Αν το γινόμενο δύο αριθμών δεν είναι μηδέν, τότε τι μπορείτε να πείτε για αυτούς τους αριθμούς;

Άσκηση 39. Αν προσθέσουμε δύο θετικούς αριθμούς τότε τι πρόσημο έχει το αποτέλεσμα;

Άσκηση 40. Ποιοι είναι οι μη αρνητικοί αριθμοί;

Μάθημα 4 – Βασικές Πράξεις

Άσκηση 41. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Ποιο είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών;

ii. Ποιο είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών;

iii. Ποιο είναι το σύνολο των ρητών αριθμών;

iv. Τι είναι η απόλυτη τιμή ενός αριθμού;

Άσκηση 42. Να κάνετε τις πράξεις, αφού διαγράψετε τους αντίθετους.

i. $-2+6+2$

ii. $2+3-3+2-4-2-2$

iii. $-2+3-3+5$

iv. $-7-20+2+4+20$

v. $-3+3-4-5-6+5$

vi. $-2023-1-45+2023+45$

Άσκηση 43. Να κάνετε τις πράξεις. Υπ. Πρώτα τους θετικούς και μετά τους αρνητικούς.

i. $-2-4+2+1-4$,

ii. $-4-5+2-1+3$,

iii. $-5-3+2+1+2-2-1$,

iv. $-7+8-2-4+1$

Άσκηση 44. Να κάνετε απαλοιφή παρενθέσεων και μετά τις πράξεις:

i. $(2-3)-(-2-3)$,

ii. $-(-2+3)+(3-2)$,

iii. $-(-3-2)-(-2+3)$,

iv. $(3+2)+(-3+4)-(-2-1)$,

v. $-(-2+1-2)-(3-2-1)$

vi. $(2+3-2)-(-1-3+3-2-4)$

vii. $-[-(-2-1)-(-3+2)-3]$

viii. $-[(3-2)-(-1-2)]-[-(-2+1)-1]$

Άσκηση 45. Να κάνετε τις πράξεις με την σωστή σειρά:

i. $2\cdot 5-3\cdot(-5)$,

ii. $8:(-2)-(3-4):(7-8)+1$

iii. $\dfrac{8}{(-2)}-\dfrac{(3-4)}{(7-8)}+1$

iv. $7\cdot(-1)-(-1)\cdot(-2)-(-1)$

Άσκηση 46. Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

i. $-2(-3+4)$,

ii. $2(4-3-2)$

iii. $(-2-3)3$

iv. $(-2-1)(3-1)$

v. $(1-2)(-2-1)(-1+2)$

vi. $(-2-3)(-1)$

vii. $3(-1-2)2$

viii. $2\cdot 3(-1-2)$

Άσκηση 47. Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας όπως το παράδειγμα:
$6\cdot 3+6\cdot 7=6(4+7)=6\cdot 10=60$

i. $5\cdot 4+5\cdot 6$

ii. $5\cdot 1+5\cdot 6+5\cdot 3$

iii. $3\cdot12-3\cdot2$

iv. $2\cdot18-2\cdot8$

v. $(-5)\cdot4+(-5)\cdot6$

vi. $-5\cdot4-5\cdot6$

Άσκηση 48. Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της ιδιότητας $(\alpha\pm\beta):\gamma=\alpha:\gamma\pm\beta:\gamma$

i. $(-4-8):2$,

ii. $2:(-4-8)$,

iii. $(-8-6+12):(+2)$,

iv. $\dfrac{-8-6+12}{+2}$

v. $(-6-9-12+18):(-3)$

vi. $(-5+125-25):5$

Άσκηση 49. Να κάνετε τις πράξεις.

i. $\dfrac{(-2+3)-1}{-[-(-2+3)-1]}+1$

ii. $1-\dfrac{-4(-2+1)-1}{2\cdot(-5)-3\cdot(-1)}$

Άσκηση 50. Ποια είναι η προτεραιότητα των πράξεων;

Άσκηση 51. Εάν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι $-[-(3-2)]$, $3\cdot4-2$ και $\dfrac{(3-2)-4+5}{2}$ να υπολογίσετε την περίμετρό του.

Άσκηση 52. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Ποιοι είναι οι ομόσημοι αριθμοί;

ii. Τι σημαίνει η έκφραση $\alpha\cdot\beta>0$

Μάθημα 5 – Κλάσματα

Άσκηση 53. Τι ονομάζουμε κλάσμα;

Άσκηση 54. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός δύο κλασμάτων;

ii. Πως γίνεται η διαίρεση δύο κλασμάτων;

iii. Πως γίνεται η πρόσθεση και η αφαίρεση δύο κλασμάτων

Άσκηση 55. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω κλασμάτων:

i. $+\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, $-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{-2}{3}$, $\dfrac{2}{-3}$

ii. $-\dfrac{-2}{3}$, $-\dfrac{2}{-3}$, $-\dfrac{-2}{-3}$, $\dfrac{-2}{-3}$

Άσκηση 56. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

i. $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}$, $2\cdot\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3}(-2)$

ii. $\dfrac{-2}{4}\cdot\dfrac{4}{7}$, $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{1}$, $\dfrac{0}{3}\cdot3$, $\dfrac{1}{3}\cdot0$

Άσκηση 57. Μπορούμε να διαιρέσουμε με το μηδέν;

Άσκηση 58. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

iii. $\dfrac{2}{3}:\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{-2}{4}:\dfrac{4}{7}$,

iv. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$, $\dfrac{2}{3}:4$, $\dfrac{\frac{2}{3}}{4}$, $4:\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{4}{\frac{2}{3}}$

Άσκηση 59. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς μπορούν να γραφούν με την μορφή κλάσματος ή είναι ήδη κλάσματα: -1 , 0 , 1 , 1.34 , $2.\overline{3}$.

Άσκηση 60. Να βρείτε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών:

i. $(2,3)$

ii. $(3,15)$

iii. $(3,4,5)$

iv. $(3,7,11)$

v. $(2022,4200,1240)$

Άσκηση 61. Να κάνετε τις προσθέσεις:

v. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{-2}{4}+\dfrac{4}{7}$, $\dfrac{-2}{3}+\dfrac{-1}{5}$

vi. $\dfrac{2}{-3}+\dfrac{-2}{3}$, $-\dfrac{-2}{-3}+\dfrac{-3}{-5}$

vii. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$

Άσκηση 62. Πως γίνεται η απλοποίηση ενός κλάσματος και τι είναι το ανάγωγο κλάσμα;

Άσκηση 63. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα: $\dfrac{15}{25}$, $\dfrac{345}{25}$, $\dfrac{21}{7}$, $\dfrac{6}{3}$, $\dfrac{3}{6}$, $\dfrac{8}{4}$, $\dfrac{4}{8}$

Άσκηση 64. Να κάνετε τις πράξεις με την σωστή σειρά:

i. $-\frac{-2}{3}:\frac{3}{2}+\frac{-(\frac{-2}{3}+\frac{4}{5})-1}{2-(-\frac{3}{4})\cdot\frac{5}{2}}$,

ii. $\frac{-1}{3-\frac{1}{3-\frac{1}{5}}}$

Άσκηση 65. Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

i. $-2(-\frac{3}{4}+\frac{4}{5})$,

ii. $2(\frac{4}{3}-\frac{3}{5}-\frac{2}{7})$

iii. $(\frac{-2}{3}-\frac{3}{5})3$

iv. $(\frac{-2}{3}-\frac{1}{5})(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})$

Άσκηση 66. Εάν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι $\frac{2}{3}$ και $\frac{2}{5}$ να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του.

Μάθημα 6 – Αναλογίες

Άσκηση 67. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Τι ονομάζουμε λόγο;

ii. Τι είναι η αναλογία;

iii. Να γράψετε τις ιδιότητες των αναλογιών.

Άσκηση 68. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

i. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow 2\cdot 6=3\cdot 4$

ii. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{6}{3}=\frac{4}{2}$

iii. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$

iv. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{2+3}{3}=\frac{4+6}{6}$

v. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{2-3}{3}=\frac{4-6}{6}$

vi. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{2}{3+2}=\frac{4}{6+4}$

vii. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{2}{3-2}=\frac{4}{6-4}$

Άσκηση 69. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

i. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2+4}{3+6}$

ii. $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}=\frac{4+12}{5+15}$

Άσκηση 70. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

i. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow 2\cdot 6=3\cdot\ldots$

ii. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{6}{3}=\frac{\quad}{2}$

iii. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{2}{\quad}=\frac{3}{6}$

iv. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{2+\ldots}{3}=\frac{4+6}{\quad}$

v. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{2-3}{3}=\frac{4-\ldots}{6}$

vi. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{\quad}{3+2}=\frac{4}{6+4}$

vii. $\frac{\quad}{3}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{2}{3-2}=\frac{4}{6-4}$

Άσκηση 71. Τι είναι τα ισοδύναμα κλάσματα;

Άσκηση 72. Ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα;

i. $\frac{2}{3},\frac{10}{15}$

ii. $\frac{2}{7},\frac{3}{21}$

iii. $\frac{4}{3},\frac{8}{6},\frac{12}{9}$

iv. $\frac{7}{3},\frac{14}{6}$

Άσκηση 73. Με την βοήθεια των ισοδύναμων κλασμάτων $\frac{2}{3},\frac{4}{6}$ να κατασκευάσετε άλλα ζεύγη ισοδύναμων κλασμάτων.

Άσκηση 74. Με την βοήθεια του κλάσματος $\frac{2}{3}$ να κατασκευάσετε άλλα ισοδύναμα κλάσματα.

Μάθημα 7 – Διανύσματα

Άσκηση 75. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Τι είναι ο άξονας των πραγματικών αριθμών;

ii. Τι είναι τα μονόμετρα και τα διανυσματικά μεγέθη;

iii. Τι είναι η θέση;

iv. Τι είναι η μετατόπιση;

v. Τι είναι το διάστημα;

Άσκηση 76. Να αναλύσετε τα τυπογραφικά στοιχεία της έκφρασης: $x_0 = -5m$. Δηλαδή τι σημαίνουν τα x_0 , $\pm$, 5 , m .

Άσκηση 77. Αν η αρχική θέση θέση ενός κινητού είναι $x_0 = -100m$ και η τελική του είναι $x = +200m$ αφού κάνετε ένα σχήμα να σχεδιάσετε και να υπολογίστε τα παρακάτω

i. την μετατόπιση,

ii. το διάστημα,

iii. προς τα που κινείται το όχημα;

Άσκηση 78. Αν η αρχική θέση θέση ενός κινητού είναι $x_0 = 100m$ και η τελική του είναι $x = -200\,m$ αφού κάνετε ένα σχήμα να σχεδιάσετε και να υπολογίστε τα παρακάτω

i. την μετατόπιση,

ii. το διάστημα,

iii. προς τα που κινείται το όχημα;

Άσκηση 79. Ένα όχημα βρίσκεται την χρονική στιγμή $t_0 = 10\,s$ στην θέση $x_0 = +250m$ και την χρονική στιγμή $t = 20\,s$ στην θέση $x = -100\,m$. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις κάνοντας και ένα αντίστοιχο σχήμα:

i. Να υπολογίστε την αρχική και τελική θέση του κινητού.

ii. Να υπολογίσετε την μετατόπιση του κινητού καθώς και να αναφέρετε τον προσανατολισμό της κίνησης του.

iii. Να υπολογίστε το διάστημα που διένυσε το κινητό.

iv. Να υπολογίστε την μέση ταχύτητα του.

Άσκηση 80. Τι γνωρίζεται για την μέση ταχύτητα. Αναλύστε έννοιες όπως: τον διανυσματικό ή μονόμετρο χαρακτήρας της, μέτρο, μονάδες κτλ.

Άσκηση 81. Ένα όχημα την χρονική στιγμή $t_0 = 12\,s$ βρίσκεται στην θέση $x_0 = -100\,m$ και κινείται προς τα δεξιά και την χρονική στιγμή $t_1 = 22\,s$ έχει κινηθεί μέχρι την θέση $x_1 = +100\,m$. Στην συνέχεια αλλάζει φορά κίνησης και κινείται προς τα αριστερά και την χρονική στιγμή $t_2 = 32\,s$ βρίσκεται στην θέση $x_2 = -200\,m$. Αφού κάνετε ένα κατάλληλο σχήμα να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Να σχεδιάσετε στο σχήμα τις τρεις θέσης του οχήματος.

ii. Να υπολογίσετε την μετατόπιση του οχήματος.

iii. Να υπολογίστε το διάστημα που διένυσε το όχημα

iv. Να υπολογίστε την μέση ταχύτητα του.

Άσκηση 82. Να λύστε τους παρακάτω τύπους ως προς όλες τις μεταβλητές που περιέχουν.

i. $u_\mu = \frac{s}{\Delta t}$

ii. $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

iii. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

iv. $\alpha = \beta \cdot \gamma$

v. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Άσκηση 83. Ένα όχημα κινείται με μέση ταχύτητα $u_M = 40\,m/s$ για χρονικό διάστημα $\Delta t = 20\,s$. Να λύσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

i. Να βρείτε τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης

ii. Να κάνετε ένα σχήμα

iii. Να υπολογίστε το διάστημα που διένυσε το όχημα.

Άσκηση 84. Ένα όχημα έχει διανύσει διάστημα-απόσταση ίση με $s = 100\,m$ σε χρόνο $\Delta t = 20\,s$. Να λύσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

iv. Να βρείτε τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης

v. Να κάνετε ένα σχήμα

vi. Να υπολογίστε την μέση ταχύτητα που έχει το όχημα

vii. Η μέση ταχύτητα είναι μονόμετρο ή διανυσματικό μέγεθος.

viii. Είναι σωστό να πούμε ότι η μέση ταχύτητα μας δείχνει τον προσανατολισμό της κίνησης;

Δυνάμεις Πραγματικών Αριθμών

Θεωρία

1) Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό ν ορίζεται όπως παρακάτω:

   i. $\alpha^0=1$ με $\alpha\neq 0$,

   ii. $\alpha^1=\alpha$

   iii. $\alpha^\nu=a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ με $\nu\geq 2$

   iv. $\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^\nu}$ αν με $\alpha\neq 0$

2) Δηλαδή το 2^3 είναι μια δύναμη που έχει βάση το 2 και εκθέτη το 3.

3) Οι δυνάμεις έχουν τις παρακάτω **ιδιότητες**:

   i. $\alpha^\mu\cdot\beta^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$

   ii. $\alpha^\mu:\beta^\nu=\alpha^{\mu-\nu}$

   iii. $(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\mu$

   iv. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$

   v. $(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}$

   vi. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

4) Δεν ορίζεται η δύναμη 0^0 .

5) Δεν ορίζεται η δύναμη 0^ν όταν το $\nu<0$ γιατί έχουμε διαίρεση με το μηδέν, π.χ. $0^{-2}=\dfrac{1}{0^2}$

6) Όταν η βάση είναι θετική $\alpha>0$ τότε για οποιοδήποτε εκθέτη $\nu\in\mathbb{N}$ η δύναμη α^ν είναι θετική $\alpha^\nu>0$

7) Όταν $\alpha<0$, τότε όταν ο $\nu\in\mathbb{N}$ είναι άρτιος η δύναμη είναι $\alpha^\nu>0$, ενώ όταν ο ν είναι περιττός τότε $\alpha^\nu<0$

8) Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha\cdot 10^\nu$, δηλαδή ως γινόμενο ενός αριθμού α επί μια δύναμη του 10. Τη μορφή αυτή την ονομάζουμε **τυποποιημένη**. Ο αριθμός α είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10.

Μάθημα 1 – Ορισμός και ιδιότητες

Άσκηση 85. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

   i. Πώς ορίζονται οι δυνάμεις;

   ii. Να γράψετε τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Άσκηση 86. Να κάνετε τις πράξεις:

   i. 2^0 , 2^1 , 2^3 , 2^4

   ii. 1^0 , 1^1 , 1^2 , 1^3 , 1^4

   iii. 0^1 , 0^2 , 0^3 , 0^4

   iv. 3^0 , 3^1 , 3^2 , 3^3

   v. 4^0 , 4^1 , 4^2 , 4^3

   vi. 5^0 , 5^1 , 5^2 , 5^3

Άσκηση 87. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(-1)^0$, $(-1)^1$, $(-1)^2$, $(-1)^3$

ii. $(-2)^0$, $(-2)^1$, $(-2)^3$

iii. $(-3)^0$, $(-3)^1$, $(-3)^2$, $(-3)^3$

iv. $(-5)^0$, $(-5)^1$, $(-5)^2$, $(-5)^3$

Άσκηση 88. Ορίζετε η πράξη 0^0 ;

Άσκηση 89. Να κάνετε τις πράξεις:

i. 2^{-1} , 2^{-2} , 2^{-3} , 2^{-4}

ii. 3^{-1} , 3^{-2} , 3^{-3} , 3^{-4}

iii. 1^{-1} , 1^{-2} , 1^{-3} , 1^{-4}

Άσκηση 90. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(-2)^{-1}$, $(-2)^{-2}$, $(-2)^{-3}$

ii. $(-3)^{-1}$, $(-3)^{-2}$, $(-3)^{-3}$

iii. $(-1)^{-1}$, $(-1)^{-2}$, $(-1)^{-4}$

iv. -2^0 , -2^1 , -2^2 , -2^3 , -2^4

Άσκηση 91. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\left(\frac{3}{2}\right)^0$, $\left(\frac{3}{2}\right)^1$, $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{2}\right)^3$

ii. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$

iii. $\left(\frac{-3}{2}\right)^{-1}$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{-2}\right)^{-3}$

Άσκηση 92. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2^3\cdot 2^4$

ii. $2^2\cdot 2^6\cdot 2^3$

iii. $2^{-2}\cdot 2^2$

iv. $2^{-3}\cdot 2^5$

v. $2^{-3}\cdot 2^{-5}$

Άσκηση 93. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2^3:2^4$

ii. $2^2:2^6$

iii. $2^{-2}:2^2$

iv. $2^{-3}:2^5$

v. $2^{-3}:2^{-5}$

Άσκηση 94. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{2^3}{2^4}$

ii. $\frac{2^2}{2^6}$

iii. $\frac{2^{-2}}{2^2}$

iv. $\frac{2^{-3}}{2^5}$

v. $\frac{2^{-3}}{2^{-5}}$

Άσκηση 95. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2^3\cdot 3^3$

ii. $3^2\cdot 4^2$

iii. $5^2\cdot 2^2$

iv. $(-2)^3\cdot(\frac{1}{2})^3$

Άσκηση 96. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2^3:3^3$

ii. $3^2:4^2$

iii. $5^2:2^2$

iv. $(-2)^3:(\frac{1}{2})^3$

Άσκηση 97. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{2^3}{3^3}$

ii. $\frac{3^2}{4^2}$

iii. $\frac{\mathbf{5^2}}{\mathbf{2^2}}$

Άσκηση 98. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(2^2)^3$

ii. $(3^3)^{-2}$

iii. $((-2)^2)^3$

iv. $(-2^2)^3$

Μάθημα 2 – Ορισμός και ιδιότητες

Άσκηση 99. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Πότε οι δυνάμεις $(-x)^n$ και $-x^n$ είναι ίσες;

ii. Υπάρχουν ιδιότητες των δυνάμεων για την πρόσθεση και την αφαίρεση;

iii. Εάν οι βάσεις και οι εκθέτες είναι διαφορετικοί μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποια ιδιότητα;

Άσκηση 100. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2\cdot 3^2-10$

ii. $4^2-2^3\cdot 3$

iii. $2\cdot 3-(-2)\cdot 4^2-6\cdot(-2)$

iv. $4:8-3^2:3$

Άσκηση 101. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(2-1)^2$

ii. $-(2-1)^2$

iii. $-2\cdot(-1+2)^7$

Άσκηση 102. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(-2)^2\cdot(-3)+2\cdot 3^2-5^2\cdot(-2):5-6$

ii. $(-3)\cdot(-2)^2-(-2)^3+4^2:16-1$

iii. $-[-(-2+3)^2-1]^2+2$

Άσκηση 103. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{6}\right)^2$

ii. $\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^2+\frac{3}{6}$

iii. $-5\cdot\left(-\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right)+\frac{4}{2}:\frac{5}{4}$

Άσκηση 104. Υπολογίστε:

i. $\frac{(-3)^2\cdot 2^2+2\cdot 3^2:2}{-2^2-3^2-(-2)^2}+3$,

ii. $\frac{(-2)^2-2^2+3}{3\cdot(-3+4)^2\cdot\frac{-3^3+3^3-4}{2\cdot 4+3^2}}$

Άσκηση 105. Να διαλέξετε την σωστή απάντηση στην επόμενη πρόταση. Η τιμή (αποτέλεσμα) της σχέσης 0^{-3} είναι:

i. 1

ii. -1

iii. 0

iv. κάποιος άλλος πραγματικός αριθμός που μπορώ να υπολογίσω

v. η τιμή αυτής της σχέσης δεν ορίζεται αφού προκύπτει διαίρεση με το μηδέν.

Άσκηση 106. Αφού κάνετε τις πράξεις να γράψετε τι παρατηρείτε:

i. $(3+4)^2$, 3^2+4^2 , $3^2+4^2+2\cdot 3\cdot 4$

ii. $(1+3)^2$, 1^2+3^2 , $1^2+3^2+2\cdot 1\cdot 3$

iii. $(3-4)^2$, 3^2-4^2 , $3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4$

iv. $(1-3)^2$, 1^2-3^2 , $1^2+3^2-2\cdot 1\cdot 3$

Άσκηση 107. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

i. Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha=\alpha^4$.

ii. Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=\alpha^4$.

iii. Οι αριθμοί $(-5)^6$ και -5^6 είναι αντίθετοι.

iv. Οι αριθμοί $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ και $\left(\frac{3}{2}\right)^8$ είναι αντίστροφοι.

v. Για κάθε αριθμό α ισχύει $(3\alpha)^2=9\alpha^2$.

vi. Ο αριθμός $-(-5)^2$ είναι θετικός.

vii. Ο αριθμός 2^2+3^2 είναι ίσος με τον $(2+3)^2$

viii. $(-1)^{2023}=-1$

ix. $(-1)^{2024}=1$

Άσκηση 108. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της πρώτης στήλης με αυτά της δεύτερης.

Στήλη Α	Στήλη Β
(α) $(2^4)^{-1}$	(1) $\frac{1}{4}$
(β) $(2^{-5})^2\cdot 2^{10}$	(2) -2^4
(γ) $(-2)^{-2}$	(3) 4
(δ) $(2^4:2^3)\cdot 2^2$	(4) 2^3
	(5) 2^{-4}
	(6) 1

Άσκηση 109. Να κάνετε τις πράξεις:

i. 10^0 , 10^1 , 10^2 , 10^3

ii. 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3}

Μάθημα 3 – Βασικές Πράξεις

Άσκηση 110. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Πότε δεν ορίζετε η δύναμη με εκθέτη το μηδέν;

ii. Η ποσότητα $(-2)^3$ είναι θετική;

iii. Τι πρόσημο έχει η ποσότητα $(-2)^4$

iv. Ποιες δυνάμεις του (-2) είναι θετικές και ποιες είναι αρνητικές; Για να το βρείτε κάνετε τις πράξεις: $(-2)^0$, $(-2)^1$, $(-2)^2$, $(-2)^3$ κτλ

Άσκηση 111. Προσπαθήστε να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς ως δυνάμεις. Υπ. $9=3^2$

i. 1 , 4 , 8 , 9 , 12 , 16 ,

ii. 25 , 27 , 125 , 64 , 81

Άσκηση 112. Γράψτε τους παρακάτω αριθμούς ως δυνάμεις, π.χ. $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

i. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{16}{81}$

Άσκηση 113. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(-1)^2$, $(-1)^4$, $(-1)^6$, $(-1)^8$

ii. $(-1)^1$, $(-1)^3$, $(-1)^5$, $(-1)^7$

iii. Μπορείτε να διατυπώσετε κάποιον κανόνα;

Άσκηση 114. Λύστε όπως το παράδειγμα:

$$2\cdot 4\cdot 8=2^1\cdot 2^2\cdot 2^3=2^{1+2+3}=2^6$$

i. $2\cdot 4\cdot 8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$

ii. $3\cdot 9\cdot 27\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^5$

iii. $\left(\frac{1}{25}\right)^6\cdot 5^3\cdot 25^2\cdot 125$

Άσκηση 115. Υπολογίστε:

$$\frac{[-3^{-2}]^3[(-9)^{-2}]}{(-9)^3(-3)^2}$$

Άσκηση 116. Να υπολογίσετε τα πρόσημα στις παρακάτω περιπτώσεις, χωρίς να κάνετε τις πράξεις:

i. $(-1)^{2023}$

ii. -1^{2024}

iii. 1^{2023}

iv. 1^{2024}

Άσκηση 117. Αφού υπολογίστε τα πρόσημα στις παρακάτω περιπτώσεις μπορείτε να διατυπώστε έναν κανόνα;

i. $(-2)^2+(+3)^2$

ii. $(-2)^2+(-3)^2$

iii. $(+2)^2+(+3)^2$

iv. $0^2+(-2)^2$

v. $0^2+(+2)^2$

vi. 0^2+0^2

Άσκηση 118. Αφού κάνετε τις παρακάτω πράξεις προσπαθήστε να διατυπώσετε έναν κανόνα:

i. $(1+3)^2$, $1^2+3^2+2\cdot 1\cdot 3$

ii. $(1-3)^2$, $1^2+3^2-2\cdot 1\cdot 3$

iii. $(3+4)^2$, $3^2+4^2+2\cdot 3\cdot 4$

iv. $(3-4)^2$, $3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4$

Άσκηση 119. Αφού κάνετε τις παρακάτω πράξεις προσπαθήστε να διατυπώσετε έναν κανόνα:

i. $(1-3)^2$, $(3-1)^2$

ii. $(2-1)^2$, $(1-2)^2$

iii. $(4-3)^2$, $(3-4)^2$

Άσκηση 120. Να κάνετε τις πράξεις:

i. 10^0 , 10^1 , 10^2 , 10^3

ii. 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3}

Μάθημα 4 – Πράξεις

Άσκηση 121. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Ποια είναι η προτεραιότητα των πράξεων;

ii. Ποια πράξη (η διαίρεση ή η πρόσθεση) έχει προτεραιότητα στην έκφραση: $\frac{2+3}{5+6}$ και γιατί;

Άσκηση 122. Να κάνετε τις πράξεις με την σειρά που πρέπει:

i. $2\cdot(-3)$

ii. $2+(-3)$

iii. $2\cdot 3-4\cdot 5$

iv. $2^3\cdot 4$

v. 2^3+4

vi. 2^3-5

vii. $2^3:8$

viii. $\frac{2^3}{2}$

Άσκηση 123. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(2-3)^2$

ii. $(2-3\cdot 2)-2^3$

iii. $2^4-(-2-3\cdot(-2))+1$

iv. $(2^2\cdot 3-4:2^2)-5^2$

v. $2\cdot 3+5\cdot(-1)^3-(-2\cdot 3-2)^2$

Άσκηση 124. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{-2\cdot(-3)+3^2}{2\cdot 3-4}$

ii. $\frac{-4-(-2-3)+2^2\cdot 3}{-(-4+5)}$

iii. $\frac{-2^2+3\cdot(-2)^2}{1+5\cdot(-2)^3}$

iv. $\frac{-(-2+3)^{2001}+2021^0}{0^{2023}+1}$

v. $\frac{1-1:2}{1+1:2}$

Άσκηση 125. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-4}:\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}\right]^{-4}$

ii. $\frac{[-3^{-2}]^3[(-9)^{-2}]}{(-9)^3(-3)^2}$

Άσκηση 126. Υπολογίστε:

i. $\frac{1-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0}{-2}$

ii. $\frac{2^{-3}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^0-12\cdot 3^{-3}}$

Άσκηση 127. Υπολογίστε:

$$\frac{(-2)^2-2^2+3}{3\cdot(-3+4)^2\cdot\frac{-3^3+3^3-4}{2\cdot 4+3^2}}$$

Άσκηση 128. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{6}\right)^2$

ii. $\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^2+\frac{3}{6}$

iii. $-5\cdot\left(-\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right)+\frac{4}{2}:\frac{5}{4}$

Άσκηση 129. Να κάνετε τις πράξεις:

$$A=\frac{-1+\frac{1}{2}}{4-\frac{2}{3}}-\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right):(-2)}{\left(\frac{1}{5}+2\right):(-5)}-(-4):\frac{1}{5}$$

Η έννοια της Μεταβλητής

Θεωρία

1) Η **μεταβλητή** είναι ένα γράμμα που το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου.
2) Οι μεταβλητές μπορεί να είναι τα παρακάτω γράμματα: α, β, γ, δ, … κ, λ, μ, ν, … x, y, ω, t κ.α.
3) Μπορούμε να παρομοιάσουμε τις μεταβλητές με ένα άδειο κουτάκι όπου μέσα του μπορούμε να τοποθετήσουμε έναν αριθμό.
4) Στην έκφραση $2x+5y+3x$ για $x=1$ και $y=-2$ μέσα στις μεταβλητές x (κουτάκια x) μπορούμε να βάλουμε τον αριθμό 1 και στις y τον αριθμό -2, επομένως η παραπάνω έκφραση θα γίνει: $2\cdot(+1)+5\cdot(-2)+3\cdot(+1)$. Η διαδικασία αυτή ονομάζετε **αντικατάσταση**.
5) Μπορούμε να αντικαταστήσουμε και ομάδες από μεταβλητές, π.χ. εάν έχουμε την έκφραση $2(x+y)$ και ότι $x+y=\frac{1}{2}$ τότε η έκφραση γίνεται: $2(x+y)=2(\frac{1}{2})=1$
6) Για να κάνουμε **πρόσθεση** και **αφαίρεση** μεταξύ των μεταβλητών θα πρέπει αυτές να είναι ίδιες (ίδιο γράμμα). Δηλαδή μπορούμε να προσθέσουμε: $2\alpha+3\alpha$ που δίνει αποτέλεσμα 5α. Ακόμα μπορούμε να αφαιρέσουμε: $2\alpha-3\alpha$ μας δίνει -1α
7) Όταν μπροστά από την μεταβλητή είναι ο αριθμός 1 ή -1 τον παραλείπουμε. Δηλαδή $1\alpha=\alpha$ και $-1\alpha=-\alpha$
8) Είναι πολύ χρήσιμη η **επιμεριστική ιδιότητα**: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$, π.χ. έχουμε: $2(\chi-3)=2\chi-6$ και $-2(-3\psi+7)=6\psi-14$
9) Την επιμεριστική ιδιότητα την εφαρμόζουμε και αντίστροφα: $2\chi+3\chi=(2+3)\chi=5\chi$
10) Η διαδικασία με την οποία κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις μεταξύ των μεταβλητών την ονομάζουμε **αναγωγή ομοίων όρων**. Προσοχή πρέπει να δίνουμε ώστε να προσθέτουμε και να αφαιρούμε **όμοιους όρους**, δηλαδή όρους με ίδια γράμματα.
11) Οι όροι: $2x$ και $5x$ είναι **όμοιοι** ενώ οι $2x$ και $5y$ δεν είναι όμοιοι.

Μάθημα 1 – Βασικές Έννοιες

Άσκηση 130. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Τι γνωρίζετε για την επιμεριστική ιδιότητα

ii. Ποια διαδικασία ονομάζουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Άσκηση 131. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $3x+2x$

ii. $a+3a-4a-3a$

iii. $-y-3y+y+3y$

iv. $3x-x-7x+2x$

Άσκηση 132. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2\cdot(x+3)$

ii. $2\cdot(x-3)-4\cdot(x-1)+2$

Άσκηση 133. Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις

i. Το τριπλάσιο ενός αριθμού.

ii. Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά πέντε.

Άσκηση 134. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $2\cdot(3x+5)-3x$

ii. $(3-4)(3x-2y)-4y+8y$

iii. $-3x\cdot(3-6)-8x$

iv. $[2^2-3\cdot(-3+5)]x-16x$

Άσκηση 135. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i. $2x$ για $x=1$

ii. $2x-5y$, για $x=3$ και $y=-2$

iii. $2(x+3y)-4(-x-5y)$, για $x=1$ και $y=-1$

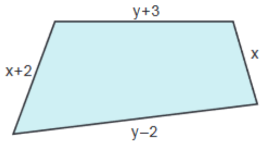
iv. $4x^3$, για $x=-2$

Άσκηση 136. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i. $A=3(x+2y)+2(3x+y)+y$ για $(x+y)=\frac{1}{9}$

ii. $5(x+3y)-10y$, για $(x+y)=-\frac{1}{5}$

Άσκηση 137. Να υπολογίσετε την περίμετρο του παρακάτω τετραπλεύρου:



Άσκηση 138. Η μία πλευρά ενός ορθογωνίου έχει μήκος $2(x+3y)$ και η άλλη έχει $5x+y$.

i. Να υπολογίστε την περίμετρο με την βοήθεια μίας αλγεβρικής παράστασης

ii. Να βρείτε την τιμή αυτής της αλγεβρικής παράστασης για $(x+y)=\frac{1}{7}$ μέτρα.

Άσκηση 139. Να υπολογίστε την τιμή της παρακάτω παράστασης

$$\frac{[(2x^{-2}y)^2]^{-4}}{(2xy^2)^{-5}}$$

αν $x=-1$ και $y=-2$

Μάθημα 2 – Βασικές Έννοιες

Άσκηση 140. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Τι ονομάζουμε μεταβλητή;

ii. Ποια γράμματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για μια μεταβλητή;

iii. Τι είναι η τιμή μιας μεταβλητής;

iv. Αν θα μπορούσατε να κάνετε μία παρομοίωση, τι θα λέγατε ότι είναι μια μεταβλητή

Άσκηση 141. Ποια από τα παρακάτω σύμβολα μπορεί να είναι μεταβλητές;

i. $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots$

ii. x,ψ,ω

iii. $a,b,c,\ldots$

iv. $\kappa,\lambda,\mu,\ldots$

v. v,n

vi. x,y,z

vii. $\$,\%,@$

Άσκηση 142. Εάν $\alpha=1$ και $\beta=-3$ να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i. $\alpha+\beta$

ii. $\alpha-\beta$

iii. $-\alpha$

iv. $-\beta$

v. $\alpha-(-\beta)$

Άσκηση 143. Εάν $\alpha=2$ και $\beta=-4$ να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i. 2α

ii. $\beta:2$, $\frac{\beta}{2}$

iii. $\frac{\alpha}{\beta}$

iv. $2\alpha+\beta$

v. $2\alpha-3\beta$

vi. $3+\alpha\beta$

vii. $\alpha(\alpha+\beta)$

Άσκηση 144. Εάν $\alpha=1$ και $\beta=2$ να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i. α^2+3

ii. $\alpha\beta^2-\alpha\beta$, $\alpha\beta(\beta-1)$

iii. $(\alpha-\beta)^2$, $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

iv. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, $\alpha^2-\beta^2$

v. $(\alpha+\beta)^2$, $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Άσκηση 145. Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i. x^2+2x-3 , $x=1$

ii. $2x^2-3x+5$, $x=2$

iii. $-2x^2+3x-1$, $x=-1$

iv. x^2-x+1 , $x=-2$

Άσκηση 146. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{(-x)^2-x^2+y}{3\cdot(-y+4)^2\cdot\dfrac{-y^3+y^3-4}{2\cdot x+y^2}}$$

για $x=2$, $y=3$.

Άσκηση 147. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $x+x$

ii. $2x+x$

iii. $3x+2x-3x+2x$

iv. $4x-3x+2x+5x$

Άσκηση 148. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2x+x+y+3y$

ii. $2x+2x+y+3x-y$

iii. $4y+4x-4x-4y$

iv. $-4x+2x-y-3y+x$

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Θεωρία

1) **Εξίσωση 1ου βαθμού** είναι η εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha\neq0$

2) Μια εξίσωση περιέχει το σύμβολο της ισότητα (=) και τουλάχιστον μία μεταβλητή, π.χ. οι παρακάτω είναι εξισώσεις:

   i. $2\chi+5=0$

   ii. $3\chi-4=5$

   iii. $3\chi-4\chi=7\chi-9$

   iv. $3(\chi-2)-4\chi=9(\chi-1)$

   v. $\frac{\chi-1}{3}=4-\frac{2\chi-1}{6}$

3) Μία εξίσωση αποτελείται πάντα από δύο **μέλη**.

4) **Λύση** ή **Ρίζα** μίας εξίσωσης είναι ο αριθμός που την επαληθεύει. Δηλαδή εάν αντικαταστήσουμε αυτόν τον αριθμό στην μεταβλητή της εξίσωσης και κάνουμε τις πράξεις ξεχωριστά σε κάθε μέλος θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα.

5) Σε μία εξίσωση μπορούμε να κάνουμε τις παρακάτω πράξεις (**ιδιότητες**)

   i. Να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της

   ii. Να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και από τα δύο μέλη της

   iii. Να πολλαπλασιάσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη και τέλος

   iv. Να διαιρέσουμε ένα αριθμό διάφορο το μηδενός και στα δύο μέλη της.

   Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις προκύπτει μια νέα εξίσωση ισοδύναμη με την προηγούμενη.

6) Για να λύσουμε μια εξίσωση αρκεί να βρούμε έναν αριθμό που εάν τον αντικαταστήσουμε στην μεταβλητή της τότε αυτός την επαληθεύει.

7) **Επίλυση** ονομάζουμε την διαδικασία που βρίσκουμε την λύση μιας εξίσωσης.

8) Για να λύσουμε μια εξίσωση

   i. Κάνουμε απαλοιφή των παρανομαστών πολλαπλασιάζοντας με το ΕΚΠ.

   ii. Απαλείφουμε τις παρενθέσεις με την επιμεριστική ιδιότητα

   iii. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

   iv. Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

9) Εξισώσεις της μορφής $0x=0$ ονομάζονται **ταυτότητες** και έχουν άπειρες λύσεις, δηλαδή όποιον αριθμό και να αντικαταστήσουμε στο x τότε αυτός την επαληθεύει.

10) Εξισώσεις της μορφής $0x=\alpha$, $\alpha\neq0$ ονομάζονται **αδύνατες** και δεν έχουν καμία λύση.

11) Η παράσταση της μορφής $(x+a)=0$ ή $x+a=0$ έχει λύση την $x=-a$

12) Η παράσταση της μορφής $(x-a)=0$ ή $x-a=0$ έχει λύση την $x=a$

13) Η παράσταση της μορφής $(ax+b)=0$ ή $ax+b=0$ έχει λύση την $x=-\frac{b}{a}$

14) Η παράσταση της μορφής $(ax-b)=0$ ή $ax-b=0$ έχει λύση την $x=\frac{b}{a}$

15) Μια εξίσωση ονομάζετε **παραμετρική** όταν εκτός από την κύρια μεταβλητή (π.χ. x) υπάρχει και μια δευτερεύουσα μεταβλητή (π.χ. μ) που ονομάζουμε παράμετρο μ. Παρακάτω βλέπουμε μερικά παραδείγματα:

   i. $2\mu x-3=0$

   ii. $\mu(x-1)+2x=3$

   Το μ μπορεί να παίρνει διάφορες τιμές και για κάθε τιμή που βάζουμε (στο μ) προκύπτει και μια διαφορετική εξίσωση, π.χ. στον τύπο $\mu(x-1)+2x=3$ για $\mu=0$ έχουμε την εξίσωση $2x=3$ ενώ για $\mu=1$ την εξίσωση $x-1+2x=3$. Επομένως από τον αρχικό τύπο θα προκύψουν πάρα πολλές εξισώσεις και αφού έχουν κάτι κοινό θα λέμε ότι ανήκουν στην ίδια οικογένεια. Δηλαδή ο τύπος $\mu(x-1)+2x=3$ αντιστοιχεί στην οικογένεια και οι εξισώσεις $2x=3$, $x-1+2x=3$, … στα μέλη της οικογένειας. Το μ δεν θεωρείτε άγνωστος. Άγνωστος είναι το x.

16) **Τύπος** είναι μια εξίσωση που περιέχει πολλά γράμματα. Μόνο ένα από αυτά τα γράμματα είναι ο άγνωστος που ψάχνουμε να βρούμε. Τα υπόλοιπα είναι γνωστοί αριθμοί που απλά τυχαίνει αυτή την στιγμή να μην τους έχουμε αλλά πρέπει να τους θεωρούμε ως δεδομένους, π.χ. στον τύπο $u=\frac{s}{\Delta t}$ αν ψάχνουμε το s τότε αυτός είναι ο άγνωστος και τα υπόλοιπα (u, Δt) είναι γνωστά. Για να επιλύσουμε ένα τύπο ακολουθούμε τους γνωστούς κανόνες επίλυσης των εξισώσεων.

Μάθημα 1 – Βασικές Έννοιες

Άσκηση 149. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Τι ονομάζουμε εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο;

ii. Πόσα μέλη έχει μια εξίσωση;

iii. Τι είναι ο άγνωστος;

iv. Τι πρέπει να κάνουμε όταν μας ζητάνε να λύσουμε μια εξίσωση;

v. Τι ονομάζουμε ρίζα μιας εξίσωσης;

vi. Πότε μια εξίσωση είναι αδύνατη και πότε είναι ταυτότητα;

vii. Ποιες είναι οι τέσσερις πράξεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε σε μια εξίσωση;

Άσκηση 150. Ποιες από τις παρακάτω είναι εξισώσεις;

i. $2x+5=9$

ii. $4x^2+5x$

iii. $4x^2+5x+3=0$

Άσκηση 151. Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι πρώτου βαθμού;

i. $2x+4x-5=3x-9$

ii. $5x^2+3x-3=9-2x$

iii. $2(x-3)+4x=0$

iv. $\frac{2(x-1)}{3}+\frac{x}{6}=\frac{1}{2}$

v. $x(x-2)=0$

Άσκηση 152. Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι με έναν άγνωστο;

i. $2\alpha+\beta=0$

ii. $2\alpha+6=3\alpha-1$

iii. $5x+6y=9$

iv. $2x^2+5x-6=0$

v. $(x-4)(y-4)=0$

vi. $x^2+y^2=0$

vii. $2x-2+4x=4x$

viii. $15x+2=0$

Άσκηση 153. Να λύστε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $2x+6=5x-3$

ii. $7x+8x-9=10x-10+12$

iii. $-13-x-3=0$

iv. $-x-3x-6=4x+8$

v. $10x-23=2x-23$

Άσκηση 154. Να λύσετε:

i. $-x=10$

ii. $-x=-2$

iii. $-x=0$

iv. $2x=0$

Άσκηση 155. Να λύσετε:

i. $3(x+4)-(x-2)=2+2x$

ii. $4-(7x+5)=12-2x$

iii. $2(x-3)-4(2x-5)=3(-2x+5)$

iv. $4x(4-6)-3(-2x-1)=0$

Άσκηση 156. Να λύσετε:

i. $10x-2(4+5x)=-8$

ii. $8x-2(4+4x)=8$

iii. $7x-2[3(1-x)]=-(7-13x)$

iv. $6x-\{4-3[2x+5(x-1)]\}=62$

Άσκηση 157. Να λύσετε:

i. $\frac{2x-3}{4}=\frac{3x-2}{8}$

ii. $\frac{3x-5}{3}=\frac{x}{7}$

iii. $\frac{3x}{4}=\frac{x}{6}$

iv. $\frac{3x}{5}=6$

v. $\frac{x}{5}=10$

vi. $\frac{x}{6}=1-\frac{x}{3}$

vii. $\frac{x}{6}=\frac{x}{5}$

Άσκηση 158. Να λύσετε:

i. $\frac{x}{4}=2+\frac{x-3}{2}$

ii. $\frac{5(x-1)}{4}-5=\frac{x-3}{12}$

iii. $\frac{x-6}{9}-\frac{-x+2}{6}=\frac{x-3}{12}$

$\frac{15x+3}{2}-5=\frac{2(x-1)}{4}$

Μάθημα 2 – Εξισώσεις

Άσκηση 159. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Τι ονομάζουμε εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο;

ii. Πόσα μέλη έχει μια εξίσωση;

iii. Τι είναι ο άγνωστος;

iv. Τι πρέπει να κάνουμε όταν μας ζητάνε να λύσουμε μια εξίσωση;

v. Τι ονομάζουμε ρίζα μιας εξίσωσης;

vi. Πότε μια εξίσωση είναι αδύνατη και πότε είναι ταυτότητα;

vii. Ποιες είναι οι τέσσερις πράξεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε σε μια εξίσωση;

Άσκηση 160. Να λύσετε:

i. $\frac{3x-4}{3}=\frac{4x-2}{4}$

ii. $\frac{2(x-1)+2}{5}=\frac{25x}{10}$

Άσκηση 161. Να λύσετε:

i. $2-\left(\frac{2x-3}{3}-\frac{x}{6}\right)=\frac{x}{9}$

ii. $3x-3\left(\frac{3x-5}{4}-\frac{2x}{3}\right)=\frac{x}{8}$

Άσκηση 162. Να λύσετε:

i. $\frac{x}{4}=2+\frac{x-3}{2}$

ii. $5-\frac{2-x}{3}=\frac{x+3}{8}$

iii. $\frac{x-3}{12}-\frac{x-1}{6}=\frac{x+2}{3}-1$

iv. $\frac{x}{3}-6=6+\frac{x}{3}$

v. $\frac{3x-1}{2}-\frac{1-x}{4}=1-\frac{x+2}{8}$

vi. $\frac{4x-5}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{10}\left(\frac{7x}{2}+8\right)$

vii. $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{2}=0$

Άσκηση 163. Να λύστε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $0.45(x-2)+0.36=0$

ii. $0.2(2x-4)+0.1(3x-2)=0.4x-3$

Άσκηση 164. Να λύσετε την εξίσωση

$$\mu(x+6)-2=(2\mu-1)x+2$$

για:

i. $\mu=-2$

ii. $\mu=-1$

iii. $\mu=0$

iv. $\mu=1$

v. $\mu=2$

Άσκηση 165. Πόσες λύσεις μπορεί να έχει μία εξίσωση πρώτου βαθμού; Τι γίνεται στην περίπτωση $0x=0$ και τι στην $0x=a$, $a\neq 0$.

Άσκηση 166. Πότε δύο εξισώσεις έχουν κοινή λύση; Οι εξισώσεις $-2\chi+4=6$ και $3\chi+3=0$ έχουν κοινή λύση; Αν ναι ποια είναι;

Άσκηση 167. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

i. Η εξίσωση $\chi=\chi$ είναι ταυτότητα

ii. Η εξίσωση $-\chi=-1$ έχει λύση την $\chi=-1$

iii. Η εξίσωση $2\chi=0$ είναι αδύνατη

iv. Η εξίσωση $0\chi=2$ έχει άπειρες λύσεις.

v. Η εξίσωση $3\chi=0$ έχει μοναδική λύση την $\chi=0$.

vi. Η εξίσωση $\chi+1=0$ έχει μοναδική λύση την $\chi=-1$

vii. Η εξίσωση $\chi-1=0$ έχει μοναδική λύση την $\chi=1$

Η εξίσωση $2\chi+1=0$ έχει μοναδική λύση την $\chi=-\frac{1}{2}$

Ρίζες Θετικών Αριθμών

Θεωρία

1) Αφού απομνημονεύστε τα τετράγωνα των αριθμών του παρακάτω πίνακα είναι πολύ εύκολο να υπολογίστε τις ρίζες, π.χ. η $\sqrt{36}=6$ διότι $6^2=36$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

2) Οι λύσεις της εξίσωσης $x^2=36$ είναι οι αριθμοί $x=6$ ή $x=-6$ διότι $6^2=36$ και $(-6)^2=36$. Γενικά η λύσεις τις εξίσωσης $x^2=\alpha$, $\alpha\geq 0$ είναι οι αριθμοί $x=\sqrt{\alpha}$ ή $x=-\sqrt{\alpha}$.

3) **Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α**, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$

4) Ορίζουμε $\sqrt{0}=0$

5) Η **υπόρριζη** ποσότητα της τετραγωνικής ρίζας $\sqrt{\alpha}$ είναι ο αριθμός α.

6) Η υπόρριζη ποσότητα α πρέπει πάντα να είναι μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή πρέπει $\alpha\geq 0$. Η $\sqrt{(-25)}$ δεν έχει νόημα δεν υπάρχει κανένας πραγματικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο να δίνει -25. Παρατηρείστε ότι τα τετράγωνα όλων των αριθμών είναι μη αρνητικοί: $\alpha^2\geq 0$.

7) Τα αποτελέσματα όλων των τετραγωνικών ριζών είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Δηλαδή $(\sqrt{\alpha})\geq 0$. Παρατηρείστε τον παρακάτω πίνακα

α	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\sqrt{\alpha}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

8) Θα αναλύσουμε την παρακάτω μαθηματική πρόταση

Αν $\sqrt{\alpha}=x$, όπου $\alpha\geq 0$, τότε $x\geq 0$ και $x^2=\alpha$

Αυτή αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος που αρχίζει από την λέξη “Αν” και τελειώνει στην λέξη “τότε” ονομάζεται υπόθεση. Αρχικά η υπόθεση μας λέει ότι $\sqrt{\alpha}=x$ δηλαδή ότι το αποτέλεσμα της τετραγωνικής ρίζας βρίσκεται/είναι στην μεταβλητή x και ότι η υπόρριζη ποσότητα α είναι μη αρνητικός αριθμός $\alpha\geq 0$. Το δεύτερο μέρος αυτής της πρότασης ονομάζεται συμπέρασμα και μας λέει ότι το αποτέλεσμα x της τετραγωνικής ρίζας $\sqrt{\alpha}$ είναι μη αρνητικό $(x\geq 0)$ και ότι το x το ικανοποιεί την εξίσωση $x^2=\alpha$. Το x είναι η μία (η θετική) από τις δύο λύσεις της εξίσωσης $x^2=\alpha$

9) Προσέξτε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις.

$\sqrt{\alpha}^2=(\sqrt{\alpha})^2=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha}$, πρέπει $\alpha\geq 0$

$\sqrt{\alpha^2}=\sqrt{\alpha\cdot\alpha}$, εδώ το α μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν!

10) Οι παραπάνω περιπτώσεις απλοποιούνται:

$\sqrt{\alpha}^2=(\sqrt{\alpha})^2=\alpha$

$\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

11) Πολύ προσοχή στα ακόλουθα παραδείγματα: $\sqrt{5}^2=5$, $\sqrt{5^2}=|5|=5$, $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$. Δηλαδή πάντα το αποτέλεσμα αλλά και η υπόρριζη ποσότητα πρέπει να μη αρνητικοί αριθμοί.

12) Ισχύουν οι εξής δύο **ιδιότητες**

$\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ και

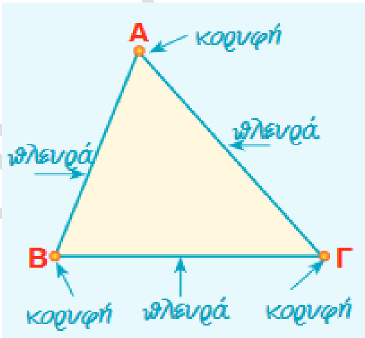
$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ με $\beta\neq 0$, π.χ.

$\sqrt{14400}=\sqrt{144\cdot 100}=\sqrt{144}\cdot\sqrt{100}=12\cdot 10=120$

$\sqrt{0.04}=\sqrt{\frac{4}{100}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}}=\frac{2}{10}=0.2$

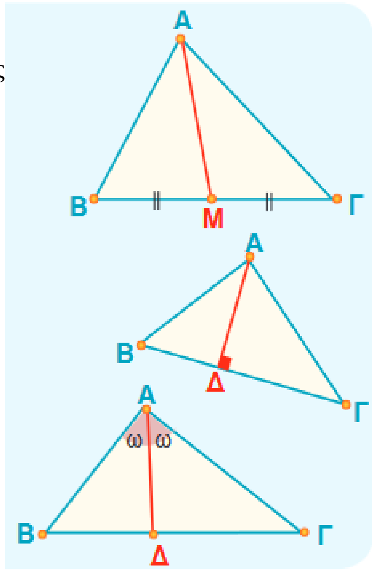
13) Είναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε τις τετραγωνικές ρίζες των δυνάμεων του 10. Προσέξτε ότι τα αποτελέσματα έχουν τα μισά μηδενικά! $\sqrt{100}=10$, $\sqrt{10000}=100$, $\sqrt{1000000}=1000$ κτλ

14) **Ορθή** είναι η γωνία που έχει άνοιγμα (μέτρο) ίσο με 90 μοίρες. Συμβολίζεται με ένα τετραγωνάκι που στην μέση έχει μια τελεία. **Οξεία** είναι η γωνία που έχει άνοιγμα από 0 έως 90 μοίρες (όχι 0 και ούτε 90), ενώ **αμβλεία** είναι αυτή που έχει μέτρο από 90 έως 180 μοίρες



15) Οι κορυφές του **τριγώνου** ονομάζονται Α, Β, Γ. Οι γωνίες του τριγώνου συμβολίζονται με $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, οι γωνίες συμβολίζονται και με τρία γράμματα $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$, $A\hat{\Gamma}B$. Οι πλευρές με δύο γράμματα AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$. αλλά και με ένα μικρό γράμμα α, β, γ με τρόπο ώστε απέναντι από την γωνία $\hat{A}$ να βρίσκεται η πλευρά α κτλ.

16) **Ορθογώνιο είναι το τρίγωνο** που έχει μία ορθή γωνία και άλλες δύο οξείες. Η μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται “υποτείνουσα” και βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία. Οι άλλες δύο πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ονομάζονται “κάθετες”.



17) Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ισοσκελές** όταν έχει δύο ίσες πλευρές. Η τρίτη πλευρά που είναι άνιση ονομάζεται βάση. Οι γωνίες που είναι προσκείμενες στην βάση είναι ίσες. Δηλαδή οι δύο γωνίες που ακουμπάνε στην βάση είναι ίσες.

18) Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ισόπλευρο** όταν και οι τρεις πλευρές έχουν το ίδιο μήκος. Όλες οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες με 60^o

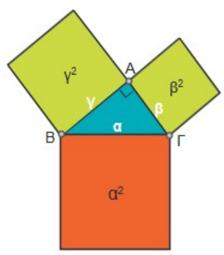
19) Ένα τρίγωνο μπορεί να είναι και ορθογώνιο αλλά και ισοσκελές ταυτόχρονα. Σε αυτή την περίπτωση οι δύο κάθετες πλευρές του είναι ίσες και οι δύο οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45 μοίρες η κάθε μία.

20) **Ύψος** ενός τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει ως αρχή μία γωνία του τριγώνου και περατώνεται κάθετα στην απέναντι πλευρά. **Διάμεσος** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει ως αρχή μία γωνία ενός τριγώνου και περατώνεται στην μέση της απέναντι πλευράς και **διχοτόμος** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει ως αρχή μία γωνία του τριγώνου την οποία και χωρίζει σε δύο ίσα μέρη και περατώνεται στην απέναντι πλευρά.

21) Αν προσθέσουμε και τις τρεις γωνίες ενός τριγώνου τότε το άθροισμα θα είναι 180 μοίρες.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o$$

22) **Πυθαγόρειο Θεώρημα**: “Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών”. Δηλαδή στο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^o$ είναι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$.



23) Όταν έχουμε να υπολογίσουμε τετραγωνικές ρίζες που είναι η μία μέσα στην άλλη αρχίζουμε από τις πιο εσωτερικές. Φανταστείτε ότι λειτουργούν με τον ίδιο τρόπο με τις επάλληλες παρενθέσεις, π.χ. στην παράσταση $\sqrt{2+\sqrt{4}}$ πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την $\sqrt{4}$, δηλαδή $\sqrt{2+\sqrt{4}}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$

Μάθημα 1 – Βασικές Πράξεις

Άσκηση 168. Να υπολογίστε τα τετράγωνα των παρακάτω αριθμών: 0, 1, 2, 3 ,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Άσκηση 169. Να υπολογίστε τα τετράγωνα των παρακάτω αριθμών: 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Άσκηση 170. Να υπολογίστε τις τετραγωνικές ρίζες των παρακάτω αριθμών: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Άσκηση 171. Να υπολογίστε τις τετραγωνικές ρίζες των παρακάτω αριθμών: 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400

Άσκηση 172. Να βρείτε τις δύο λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

i. $x^2=16$

ii. $x^2=25$

iii. $y^2=36$

iv. $\alpha^2=256$

Άσκηση 173. Ποιας εξίσωσης είναι λύση η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{16}$;

Άσκηση 174. Ποιας εξίσωσης είναι λύση η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{81}$;

Άσκηση 175. Ποιας εξίσωσης είναι λύσεις οι αριθμοί $+\sqrt{4}$ ή $-\sqrt{4}$;

Άσκηση 176. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

i. $\sqrt{16}=8$

ii. $\sqrt{25}=5$

iii. $\sqrt{-9}=-3$

iv. $\sqrt{9}=81$

v. $\sqrt{16-9}=\sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1$

vi. $\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

vii. $\sqrt{(-9)^2}=3$

viii. $\sqrt{(-9)^2}=-9$

ix. $\sqrt{(-9)^2}=9$

Άσκηση 177. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις

i. Αν για τους x και y ισχύει $\sqrt{x}=y$ τότε ο y είναι η θετική λύση της εξίσωσης $y^2=x$

ii. Αν για τους x και y ισχύει $\sqrt{x}=y$ τότε ο y είναι η θετική λύση της εξίσωσης $x^2=y$.

Άσκηση 178. Να διαλέξετε την σωστή απάντηση

Αν για τους x και y ισχύει $\sqrt{y}=x$, τότε

i. το x είναι θετικό και το y μπορεί να είναι οποιαδήποτε αριθμός

ii. τα x και y πρέπει να είναι θετικά

iii. τα x και y δεν μπορεί να είναι μηδέν

iv. τα x και y είναι μη αρνητικά

v. το y πρέπει να είναι θετικό και το x μπορεί να είναι οποιαδήποτε αριθμός.

Μάθημα 2 – Βασικές Πράξεις

Άσκηση 179. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:

i. $\sqrt{36}$, $\sqrt{3600}$, $\sqrt{0.36}$

ii. $\sqrt{144}$, $\sqrt{1.44}$, $\sqrt{14400}$, $\sqrt{0.000144}$

Άσκηση 180. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $\sqrt{4^2}$

ii. $\sqrt{7^2}$

iii. $\sqrt{(-\mathbf{6})^2}$

Άσκηση 181. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:

i. $\sqrt{\frac{36}{9}}$

ii. $\sqrt{\frac{400}{144}}$

iii. $\sqrt{\frac{36}{121}}$

Άσκηση 182. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

i. $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

ii. $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

iii. $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

iv. $\sqrt{\alpha-\beta}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$

Άσκηση 183. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{\sqrt{625}}{\sqrt{225}}-\sqrt{169}$

ii. $\sqrt{25}\cdot\frac{1}{5}-6\cdot\frac{1}{\sqrt{36}}$

Άσκηση 184. Κάνετε τις πράξεις:

i. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$

ii. $\sqrt{2+\sqrt{4}}$

iii. $\sqrt{8+\sqrt{64}}-\sqrt{1+\sqrt{9}}$

Άσκηση 185. Να βρείτε τις δύο λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

i. $x^2=16$

ii. $\alpha^2=256$

iii. $\alpha^2=49$

Άσκηση 186. Αφού κάνετε τις πράξεις να διατάξετε τους αριθμούς $\alpha^2, \alpha, \sqrt{\alpha}$ στις παρακάτω περιπτώσεις

i. α=4

ii. α=9

iii. α=16

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 187. Αφού κάνετε τις πράξεις να διατάξετε τους αριθμούς $\alpha^2, \alpha, \sqrt{\alpha}$ στις παρακάτω περιπτώσεις

iv. $\alpha=\frac{1}{4}$

v. $\alpha=\frac{1}{9}$

vi. $\alpha=\frac{1}{16}$

Τι παρατηρείτε;

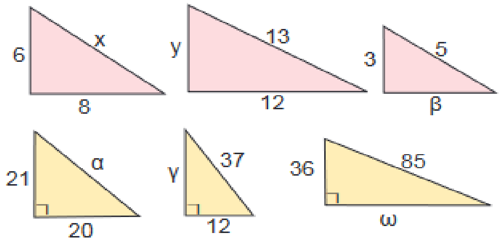
Άσκηση 188. Αφού κάνετε τις πράξεις να διατάξετε τους αριθμούς $\alpha^2, \alpha, \sqrt{\alpha}$ στις παρακάτω περιπτώσεις

vii. α=0

viii. α=1

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 189. Να υπολογίστε την άγνωστη πλευρά των παρακάτω ορθογωνίων τριγώνων:



Άσκηση 190. Αν α, β, γ είναι οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ με $\hat{A}=90^o$, αν λάβετε υπόψιν ότι απέναντι από την γωνία $\hat{A}$ είναι η πλευρά α, να υπολογίσετε την πλευρά που λείπει.

i. $\alpha=5, \beta=x, \gamma=3$

ii. $\alpha=x, \beta=5, \gamma=12$

iii. $\alpha=\frac{37}{2}, \beta=x, \gamma=\frac{35}{2}$

iv. $\alpha=25, \beta=7, \gamma=x$

v. $\alpha=x, \beta=40, \gamma=9$

vi. $\alpha=61, \beta=x, \gamma=11$

vii. $\alpha=25, \beta=7, \gamma=x$

Άσκηση 191. Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις. Ενώ όποιες είναι λανθασμένες να τις διορθώσετε

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο:

i. και οι τρεις πλευρές είναι ίσες

ii. βάση ονομάζεται αυτή που ακουμπάει στο έδαφος

iii. οι γωνίες που πρόσκεινται στην βάση είναι ίσες με 45 μοίρες

iv. και οι τρεις γωνίες του τριγώνου είναι ίσες

v. το ύψος είναι και διάμεσος και διχοτόμος

Άσκηση 192. Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις. Ενώ όποιες είναι λανθασμένες να τις διορθώσετε

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο:

i. οι δύο γωνίες είναι ίσες με 90 μοίρες η κάθε μία,

ii. έχει δύο πλευρές ίσες,

iii. η μεγαλύτερη πλευρά ονομάζεται υποτείνουσα και οι άλλες δύο κάθετες,

iv. ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα,

v. μπορεί να είναι ισοσκελές

vi. μπορεί να είναι ισόπλευρο

vii. Όλες οι γωνίες του έχουν άθροισμα ίσο με 180 μοίρες.

Μάθημα 3 – Πράξεις

Άσκηση 193. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

iv. $\sqrt{5}^2$

v. $\sqrt{5^2}$

vi. $\sqrt{(-5)^2}$

Άσκηση 194. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
9	81				
25	125				

Άσκηση 195. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\cdot\beta}$
9	81				
25	125				

Άσκηση 196. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
9	81				
25	125				

Άσκηση 197. Να εργαστείτε όπως το παράδειγμα:

$$\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}=5\sqrt{5}$$

i. $\sqrt{45}$, $\sqrt{12}$,

ii. $\sqrt{8}$, $\sqrt{75}$,

iii. $\sqrt{72}$, $\sqrt{27}$,

iv. $\sqrt{18}$, $\sqrt{40}$

Άσκηση 198. Να εργαστείτε όπως το παράδειγμα:

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$$

i. $6\sqrt{5}+5\sqrt{5}$

ii. $6\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

iii. $-6\sqrt{5}+5\sqrt{5}$

iv. $-6\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

Άσκηση 199. Να υπολογίσετε τις $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{x+y}$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\sqrt{xy}$, $\sqrt{x}\sqrt{y}$, $\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

i. Για x =4 και y =1,

ii. Για x =9 και y =16,

Άσκηση 200. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της πρώτης στήλης με αυτά της δεύτερης

Στήλη Α	Στήλη Β
(α) $\sqrt{25}$	(i) -5
(β) $\sqrt{-25}$	(ii) Δεν ορίζεται
(γ) $-\sqrt{25}$	(iii) 5
(δ) $\sqrt{(-5)}$	
(ε) $\sqrt{5^2}$	
(στ) $\sqrt{-5^2}$	

Άσκηση 201. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) εάν είναι αληθείς και με (Λ) εάν είναι ψευδείς

i. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

ii. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$

iii. $\sqrt{(-3)^2}=3$

iv. $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

v. $\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{1}{2}-1$

vi. το διπλάσιο του $\sqrt{5}$ είναι το $\sqrt{10}$

vii. το μισό του $\sqrt{12}$ είναι το $\sqrt{3}$

Άσκηση 202. Εάν η πλευρά ενός τετραγώνου είναι $5\sqrt{2}$ μέτρα, πόσο είναι το εμβαδόν του;

Άσκηση 203. Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν $50m^2$

Άσκηση 204. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν $50m^2$. Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι η πλευρά του είναι $5\sqrt{2}$ μέτρα;

Άσκηση 205. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$3\sqrt{5}-7\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

$5\sqrt{7}-8\sqrt{3}-2\sqrt{7}+4\sqrt{3}$

$\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{8}}-\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{\frac{12}{7}}$

$\sqrt{\frac{14}{5}}\cdot\sqrt{\frac{10}{7}}+\sqrt{\frac{21}{2}}\cdot\sqrt{\frac{14}{3}}$

Άσκηση 206. Να αποδείξετε τις ισότητες:

$3\sqrt{2}-\sqrt{50}+\sqrt{32}-6\sqrt{8}=-10\sqrt{2}$

$\sqrt{27}-\sqrt{20}+\sqrt{12}-\sqrt{5}=5\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{48}+\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{5}}=\sqrt{6}$

$\sqrt{3.6}\cdot\sqrt{4.9}-\sqrt{0.8}\cdot\sqrt{0.2}=3.8$

Άσκηση 207. Να κάνετε τις πράξεις:

$\sqrt{\sqrt{16}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$

$\sqrt{\sqrt{0.0001}}$, $\sqrt{\sqrt{0.0016}}$

Ρητοί, Άρρητοι και Πραγματικοί Αριθμοί

Θεωρία

1) Το σύνολο $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ περιέχει τους **φυσικούς** αριθμούς.
2) Το σύνολο $\mathbb{Z}=\{\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ περιέχει τους **ακέραιους** αριθμούς.
3) Οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν με την μορφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$ με $\nu\neq0$ ονομάζονται **ρητοί** αριθμοί και το σύνολο που τους περιέχει συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.
4) Ο αριθμοί που δεν είναι ρητοί ονομάζονται **άρρητοι**, παραδείγματα τέτοιων αριθμών είναι το $\pi=3.14\ldots$, $e=2{,}718\ldots$, $\sqrt{2}$, κτλ
5) Το σύνολο όλων των παραπάνω αριθμών ονομάζεται σύνολο των **πραγματικών αριθμών** περιέχει δηλαδή τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς. Συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.
6) Ο **άξονας** των πραγματικών αριθμών είναι μία ευθεία (χωρίς αρχή και τέλος). Η ευθεία αυτή αποτελείται από διαδοχικά σημεία το ένα δίπλα στο άλλο. Κάθε σημείο αναπαριστά και έναν πραγματικό αριθμό. Αφού τα σημεία της ευθείας είναι άπειρα, θα είναι άπειροι και οι αριθμοί. Το σημείο με τον αριθμό μηδέν 0 ονομάζεται **αρχή** του άξονα. Ο άξονας αυτός έχει προσανατολισμό, που είναι ένα βέλος που γράφουμε προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί αυξάνονται προς στα δεξιά. Αυτό ονομάζεται και διάταξη.
7) Ένας δεκαδικός αριθμός με άπειρο αριθμό δεκαδικών ψηφίων όπου ένα τμήμα αυτών των ψηφίων επαναλαμβάνεται ονομάζεται απειροψήφιος περιοδικός δεκαδικός αριθμός ή απλά **περιοδικός αριθμός**, π.χ. $0.34565656...=0.34\overline{56}$ Οι αριθμοί αυτοί είναι ρητοί και μπορούν να γραφούν με την μορφή κλάσματος. Για να γίνει η μετατροπή σε κλάσμα ακολουθούμε τον παρακάτω αλγόριθμο:
   i. Έστω α ο περιοδικός αριθμός
   ii. Εντοπίζουμε το πρώτο και το δεύτερο μέρος της περιόδου.
   iii. Πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλες δυνάμεις του 10 ώστε η υποδιαστολή να βρεθεί μπροστά από το πρώτο και το δεύτερο μέρος της περιόδου.
   iv. Αφαιρούμε τις δύο σχέσεις
8) Ακολουθεί ένα παράδειγμα μετατροπής του αριθμού 0.3456565656…
   i. Έστω α=0.34565656…
   ii. Η περίοδος είναι το 56 και πρώτη φορά εμφανίζεται στο 0.34565656… και δεύτερη φορά στο 0.34565656…
   iii. Πολλαπλασιάζουμε με 100 και 10000 αντίστοιχα: $100\alpha=34.565656\ldots$ και $10000\alpha=3456.565656\ldots$
   iv. Αφαιρούμε κατά μέλη αυτές τις δύο σχέσεις: $10000\alpha-100\alpha=3422$ ή $9900\alpha=3422$ ή $\alpha=\frac{3422}{9900}$
9) Οι αριθμοί $0=\frac{0}{1}$, $1=\frac{1}{1}$, $2=\frac{2}{1}$, $-2=-\frac{2}{1}$ κτλ είναι ρητοί. Επίσης οι αριθμοί $2.34=\frac{234}{100}$, $0.004=\frac{4}{1000}$ κτλ είναι και αυτοί ρητοί. Οι περιοδικοί όπως παραπάνω, π.χ. $0.345656...=\frac{3422}{9900}$ είναι ρητοί. Οι αριθμοί $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{16}=4$ κτλ είναι ρητοί.
10) Για να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού ακολουθούμε τον παρακάτω αλγόριθμό. Ας τον περιγράψουμε υπολογίζοντας την $\sqrt{345}=18.57$ με δύο δεκαδικά ψηφία.

i. Τοποθετούμε τον αριθμό σε σχήμα διαίρεσης

ii. χωρίζουμε τον αριθμό 345 σε δυάδες ψηφίων προσθέτοντας μηδενικά στα αριστερά αν χρειαστεί (03 45)

iii. Παίρνουμε τα δύο πρώτα ψηφία (03) και βρίσκουμε ένα αριθμό που αν τον υψώσουμε στην δευτέρα προσεγγίζει όσο το δυνατόν περισσότερο, χωρίς όμως να υπερβαίνει το (03). Ο αριθμός αυτός είναι ο 1 αφού $1^2=1$. Γράφουμε το 1 στα δεξιά.

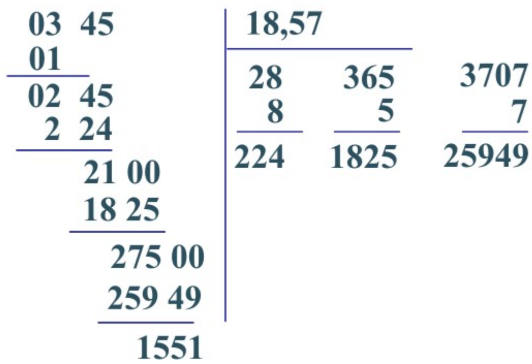
iv. Υπολογίζουμε το τετράγωνό του: $1^2=1$ και γράφουμε το αποτέλεσμα κάτω από το (03), κάνουμε την αφαίρεση και βρίσκουμε 2 στα αριστερά.

v. Κατεβάζουμε το (45) στα αριστερά δίπλα στο (02)

vi. Διπλασιάζουμε τον αριθμό στα δεξιά (το 1) και το γράφουμε από κάτω (το 2).

vii. Πρέπει να βρούμε ένα ψηφίο (από 0 έως 9) που όταν το τοποθετήσουμε δίπλα στο (2) και από κάτω και όταν κάνουμε τον πολλαπλασιασμό ο αριθμός που θα βρούμε να χωράει στο (0245). Είναι το 8 αφού $28\cdot 8=224$. Τοποθετούμε το 8 δίπλα στο 1 πάνω δεξιά.

viii. Τοποθετούμε τον 224 κάτω από τον 245 στα αριστερά και κάνουμε την αφαίρεση και βρίσκουμε 21.



ix. Η μέθοδος έχει τελειώσει και έχουμε υπολογίσει την τετραγωνική ρίζα με ακρίβεια μονάδας, αν θέλουμε συνεχίζουμε για να υπολογίσουμε και δεκαδικά ψηφία.

x. Κατεβάζουμε δυο μηδενικά και τοποθετούμε μια υποδιαστολή μετά το 18

xi. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία από (vi) και μετά, δηλαδή

xii. Διπλασιάζουμε το 18 και βρίσουμε 36 το οποίο το γράφουμε στα δεξιά και κάτω.

xiii. Πρέπει να βρούμε ένα ψηφίο (από 0 έως 9) που όταν το τοποθετήσουμε δίπλα και κάτω από το (36) και κάνουμε τον πολλαπλασιασμό ο αριθμός που θα βρούμε να χωράει στο (2100). Είναι το 5 αφού $365\cdot 5=1825$. Τοποθετούμε το 5 δίπλα στο 18, πάνω δεξιά.

xiv. Τοποθετούμε τον 1825 κάτω από τον 2100 στα αριστερά και κάνουμε την αφαίρεση και βρίσκουμε 21

xv. Κατεβάζουμε άλλα δύο μηδενικά και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία

xvi. Διπλασιάζουμε το 185 και βρίσκουμε 370 το οποίο γράφουμε κάτω δεξιά.

xvii. Πρέπει να βρούμε ένα ψηφίο (από 0 έως 9) που όταν το τοποθετήσουμε δίπλα και κάτω από το (370) και κάνουμε τον πολλαπλασιασμό ο αριθμός που θα βρούμε να χωράει στο (27500). Είναι το 7 αφού $3707\cdot 7=25949$. Τοποθετούμε το 5 δίπλα στο 18, πάνω δεξιά.

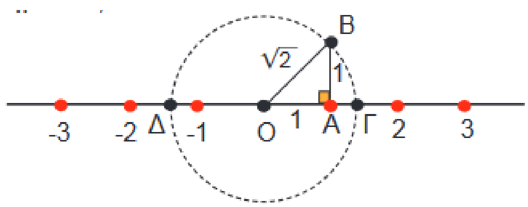
xviii. Τοποθετούμε τον 192500 κάτω από τον 27500 στα αριστερά και κάνουμε την αφαίρεση και βρίσκουμε 1551.

xix. Αν θέλουμε επαναλαμβάνουμε και για άλλα δεκαδικά ψηφία!

xx. Με αυτό τον τρόπο έχουμε υπολογίσει $\sqrt{345}=18.57$ με έλλειψη και $\sqrt{345}=18.58$ με υπερβολή.

11) Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε π.χ. τις τετραγωνικές ρίζες του βιβλίου: $\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{1764}$, $\sqrt{427}$ κτλ. Προφανώς με μικροϋπολογιστή τσέπης μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς.

12) Για να κατασκευάσουμε γραφικά την τετραγωνική ρίζα του 2 πρέπει να φτιάξουμε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και 1 αντίστοιχα. Η υποτείνουσα ισούται με $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Με διαβήτη και κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ κατασκευάζουμε κύκλο που τέμνει τον άξονα στο Γ. Η τετμημένη του Γ είναι ίση με $\sqrt{2}$.



Βλέπε την εφαρμογή 4 του βιβλίου στην σελίδα 47-48. Με παρόμοιο τρόπο αλλά με κάθετες πλευρές ίσες με 1 και 2 κατασκευάζουμε το $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Μάθημα 1 – Υπολογισμοί

Άσκηση 208. Με την βοήθεια του αλγορίθμου για τον υπολογισμό των τετραγωνικών ριζών να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

i. $\sqrt{2}$

ii. $\sqrt{3}$

iii. $\sqrt{5}$

iv. $\sqrt{7}$

Άσκηση 209. Με την βοήθεια ενός μικροϋπολογιστή τσέπης (ή του κινητού) να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες.

i. $\sqrt{50}$

ii. $\sqrt{1234}$

iii. $\sqrt{12.34}$

iv. $\sqrt{101}$

Άσκηση 210. Με την βοήθεια του αντίστοιχου αλγόριθμου να μετατρέψετε τους παρακάτω περιοδικούς αριθμούς σε ρητούς:

i. $2.\overline{3}$

ii. $23.4\overline{56}$

iii. $0.4\overline{3}$

Άσκηση 211. Χωρίς την βοήθεια μικροϋπολογιστή να διατάξετε τους παρακάτω αριθμούς πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

-3.03 , -3.04 , $\frac{4}{3}$, $-\sqrt{14}$, 4.03 , 4.04 , $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Άσκηση 212. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον αριθμό $\sqrt{2}$

Άσκηση 213. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον αριθμό $\sqrt{5}$

Άσκηση 214. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον αριθμό $\sqrt{13}$

Άσκηση 215. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$

$\sqrt{2^2}$, $\sqrt{3^3}$, $\sqrt{5^2}$

$\sqrt{(-2)^2}$, $\sqrt{(-3)^2}$

Άσκηση 216. Τοποθετήστε σε μια σειρά τους παρακάτω αριθμούς

i. $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{1}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$

ii. $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, 2

Άσκηση 217. Συγκρίνετε τους αριθμούς

i. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

ii. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+2}$

iii. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

iv. $\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$

v. $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$

vi. $-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Άσκηση 218. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $\alpha^2=0$

ii. $\alpha^2=-1$

iii. $\alpha^2=2$

iv. $\alpha^2=5$

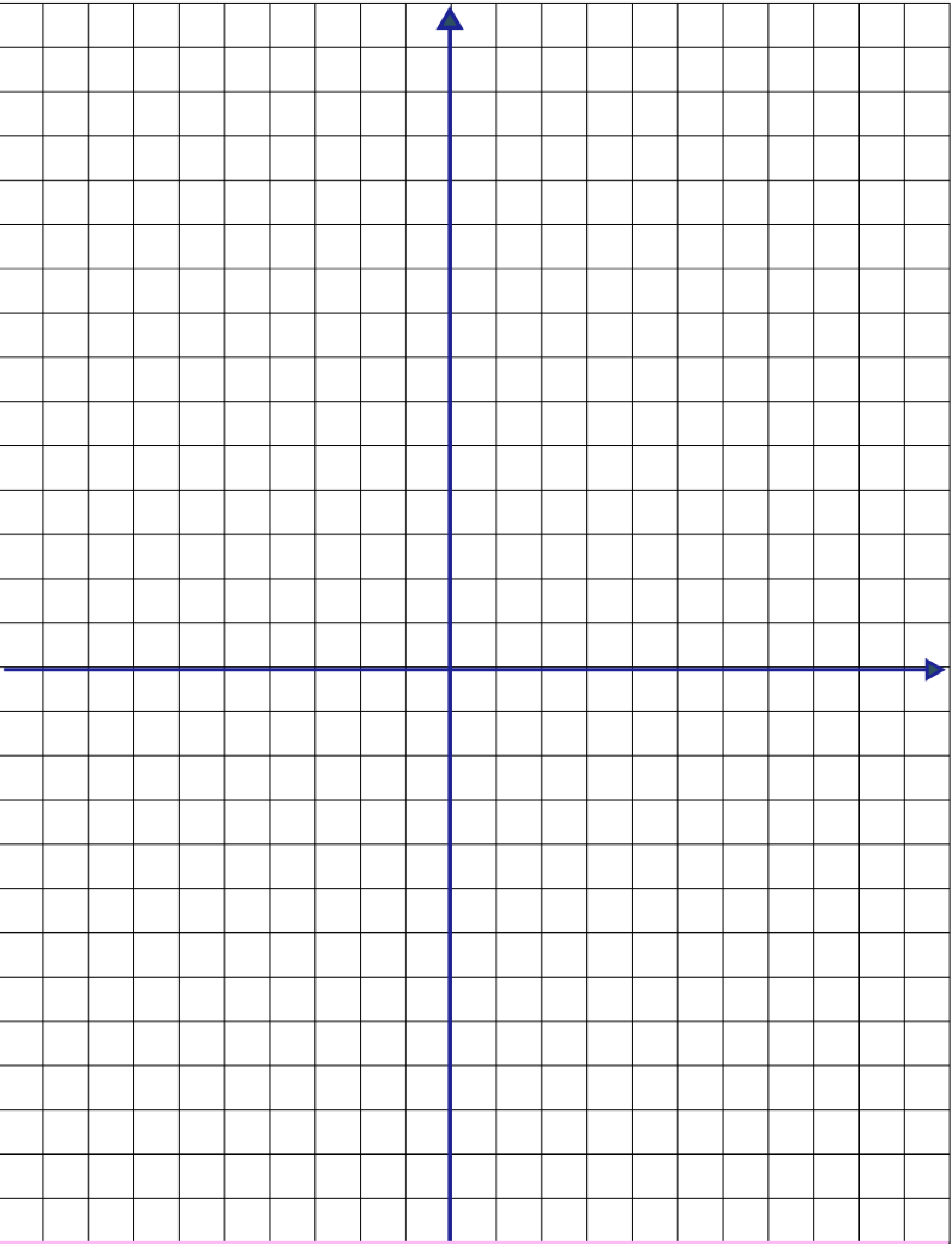
Μάθημα 2 – Προβλήματα

Άσκηση 219. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν ίσο με $9cm^2$. Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος της πλευρά του.

Άσκηση 220. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν ίσο με $13cm^2$. Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος της πλευρά του.

Άσκηση 221. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν ίσο με $9cm^2$. Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος της διαγωνίου του.

Άσκηση 222. Ένα τετράγωνο έχει διαγώνιο ίση με 9 cm. Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος της πλευρά του, την περίμετρο και το εμβαδόν του.



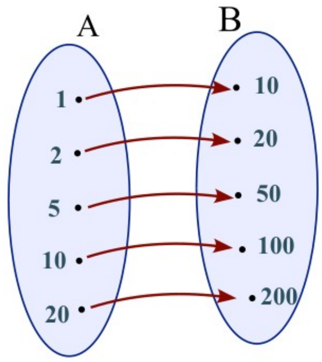
Συναρτήσεις

Θεωρία

1) **Σύνολο** είναι μία συλλογή από όμοια αντικείμενα που είναι καλά ορισμένα και διαφορετικά μεταξύ τους. Έχουμε μάθει μερικά σύνολα, π.χ. $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$ αλλά μπορείτε και να κατασκευάσετε και τα δικά σας σύνολα π.χ. $A=\{1,2,3,4,5\}$ ή $B=\{2,4,6,8,10\}$ και ότι άλλες συλλογές από αριθμούς ή άλλα μαθηματικά αντικείμενα μπορείτε να φανταστείτε.

2) Κάθε σύνολο μπορεί να έχει και μία φυσική ερμηνεία, π.χ. τα στοιχεία του συνόλου $A=\{1,2,5,10,20\}$ μπορεί να αναπαριστούν την χωρητικότητα σε λίτρα των δοχείων που έχει προς πώληση ένας παραγωγός ελαιολάδου. Δηλαδή στην συγκεκριμένη περίπτωση αυτός ο παραγωγός πουλάει δοχεία με λάδι χωρητικότητας 1, 2, 5, 10 ή 20 λίτρων.

   Ενώ τα στοιχεία του συνόλου $B=\{10,20,50,100,200\}$ μπορεί να είναι οι τελικές τιμές των παραπάνω δοχείων. Δηλαδή το δοχείο του 1 λίτρου πωλείται προς 10€ κτλ.



3) Μεταξύ δύο συνόλων μπορεί να υπάρχει μια **σχέση** (ή αντιστοιχία) π.χ. για τα δύο προηγούμενα σύνολα υπάρχει η παρακάτω αντιστοιχία:

   Δηλαδή το δοχείο του 1 λίτρου πωλείται προς 10€, των 2 λίτρων προς 20€ κτλ.

$x\in A$ (σε Λίτρα)	1	2	5	10	20
$y\in B$ (σε €)	10	20	50	100	200

4) Τα σύνολα μας αρέσει να τα σχεδιάζουμε σας "κύκλους" που μέσα τους αναγράφουμε τα στοιχεία τους και με τα βελάκια αναπαριστούμε την σχέση μεταξύ των στοιχείων τους.

5) Η σχέση μεταξύ των των στοιχείων δύο συνόλων ονομάζεται **συνάρτηση**. Την σχέση αυτή μπορούμε να την δείξουμε με αρκετούς τρόπους

   i. Με τους κύκλους και τα βελάκια του παραπάνω σχήματος

   ii. Με τον παραπάνω πίνακα που ονομάζεται πίνακας τιμών

   iii. Με τον τύπο της συνάρτησης

   iv. Με την γραφική παράσταση που θα δούμε πιο κάτω.

6) Το πρώτο σύνολο από το οποίο ξεκινάνε τα βελάκια ονομάζεται **πεδίο ορισμού**, ενώ το δεύτερο σύνολο που καταλήγουν τα βελάκια ονομάζεται **σύνολο τιμών**.

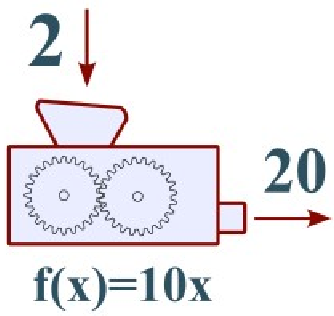
7) Τα στοιχεία του δεύτερου συνόλου ονομάζονται "**τιμές**" και η λέξη αυτή για τα μαθηματικά είναι πολύ ιδιαίτερη και θα εννοεί πάντα τα στοιχεία του δεύτερου συνόλου.

8) Τα στοιχεία του πρώτου συνόλου από όπου ξεκινάνε τα βελάκια ονομάζονται **τετμημένες** ενώ του δεύτερου **τεταγμένες**.

9) Την παραπάνω σχέση: των λίτρων του ελαιολάδου και της τιμής των, μπορούμε να την ονομάσουμε με το γράμμα f ή με τα γράμματα g, h, κτλ. Γράφουμε

$$f:A\rightarrow B \text{ με τύπο } f(x)=10\cdot x$$

10) Μία συνάρτηση μπορούμε να την παρομοιάσουμε με μία **μηχανή** που έχει μία **είσοδο** και μία **έξοδο**. Βάζουμε στην είσοδο κάποιον αριθμό, η



μηχανή κάνει πράξεις με αυτόν τον αριθμό και επιστρέφει το αποτέλεσμα αυτών των πράξεων στην έξοδο της μηχανής, π.χ. στο παράδειγμά μας αν βάλουμε στην είσοδο της μηχανής $f(x)=10x$ τον αριθμό $x=1$ θα γίνουν οι πράξεις $10\cdot 1$ και θα προκύψει στην έξοδο το αποτέλεσμα 10. Γράφουμε $f(1)=10$. Ακόμα $f(2)=20$, $f(5)=50$ κτλ

11) Η μεταβλητή x ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το αποτέλεσμα f(x) ή y ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή.

12) Σε όλες τις περιπτώσεις μια συνάρτηση με τύπο π.χ. $f(x)=10x$ μπορούμε αντί για $f(x)$ να γράφουμε y, δηλαδή $y=10x$

13) Είναι πολύ σημαντικό όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης να έχουμε ορίσει σωστά το σύνολο A, δηλαδή το πεδίο ορισμού, ώστε για όλους τους αριθμούς που θα εισάγουμε στην συνάρτηση να γίνουν οι πράξεις χωρίς προβλήματα, π.χ. στην συνάρτηση $g(t)=\frac{1}{t}$, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το $g(0)$ αφού δεν ορίζεται η διαίρεση με το μηδέν. Μπορείτε να φανταστείτε ότι ρίξατε μέσα στην μηχανή μία πέτρα (εδώ η πέτρα είναι το 0) και χάλασε ο μηχανισμός της! Επίσης φανταστείτε την συνάρτηση $h(x)=\sqrt{x}$. Εδώ δεν θα ήταν σωστό να υπολογίσουμε το $h(-1)=\sqrt{-1}$. Το -1 θα κατέστρεφε όσα ξέρετε για τον υπολογισμό των ριζών. Βέβαια ο Ιταλός μαθηματικός Τζερόλαμο Καρντάνο (1501-1576) βρήκε λύση για τον υπολογισμό αυτής της ρίζας. Επομένως προσέχουμε,

   i. Να μην διαιρούμε με το μηδέν και

   ii. να μην υπολογίζουμε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών.

14) Η δραστηριότητα 1 του σχολικού βιβλίου στην σελίδα 58 είναι πολύ σημαντική ώστε να καταλάβετε ότι μια πραγματική πόλη με δρόμους και κτίρια μπορούμε να την αναπαραστήσουμε σε μικρογραφία σε ένα χαρτί με την βοήθεια ενός συστήματος συντεταγμένων.

15) Ένα **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** αποτελείται από δύο κάθετους μεταξύ τους άξονες. Κάθε άξονας έχει πάνω του αριθμούς σε ίσες αποστάσεις που είναι η κλίμακα του. Κάθε άξονας περιέχει και από ένα βέλος που συνήθως δείχνει προς τα δεξιά, η κατεύθυνση αυτή μας δείχνει την πλευρά που αυξάνονται οι αριθμοί της κλίμακας, π.χ. το 2 βρίσκεται δεξιότερα του 1 αφού 2>1 κτλ. Το σημείο που τέμνονται οι δύο άξονες ονομάζεται αρχή (δεν είναι οι αρχή των αξόνων γιατί οι άξονες είναι ευθείες χωρίς αρχή τέλος αλλά στο σημείο αυτό βρίσκεται το μηδέν σε κάθε άξονα. Σε κάθε άξονα οι αποστάσεις μεταξύ των αριθμών πρέπει να είναι ίσες. Δηλαδή οι αριθμοί στον οριζόντιο άξονα πρέπει να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις, επίσης οι αριθμοί στον κατακόρυφο άξονα πρέπει να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις, αλλά δεν είναι αναγκαίο οι αποστάσεις στον οριζόντιο και στον κατακόρυφο άξονα να είναι ίσες, αν είναι τότε το σύστημα λέγετε κανονικό. Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λέγεται και ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και αν επιπλέον είναι και κανονικό τότε ονομάζεται και ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Επομένως,

   i. Έχουμε μία πραγματική πόλη

   ii. και ένα σύστημα συντεταγμένων ζωγραφισμένο στο χαρτί όπου αναπαριστά στην πραγματική πόλη.

16) Στην σελίδα που ακολουθεί έχουμε ένα λευκό ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων που μπορείτε να φωτοτυπήσετε και να το χρησιμοποιείται. Αλλιώς αγοράστε από το βιβλιοπωλείο ένα μιλιμετρέ χαρτί.

17) Για να σχεδιάσουμε μια **γραφική παράσταση** ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία. Σαν παράδειγμα θα δούμε πως σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση του παραδείγματος του ελαιοπαραγωγού.

   i. Κατασκευάζουμε το σύστημα συντεταγμένων, με τους άξονες την κλίμακα,την κατεύθυνση και τις μονάδες. Οι μονάδες για το παραπάνω παράδειγμα είναι για τον οριζόντιο άξονα τα Λίτρα και για τον κατακόρυφο τα €.

ii. Από τον τύπο της συνάρτηση $f(x)=10\cdot x$ και το πεδίο ορισμού $A=\{1,2,5,10,20\}$ βρίσκουμε το πεδίο τιμών κάνοντας τις πράξεις: $f(1)=1\cdot 10=10$, $f(2)=2\cdot 10=20$, $f(5)=5\cdot 10=50$ κτλ. Τα αποτελέσματα τα βάζουμε στον πίνακα τιμών.

$x\in A$ (σε Λίτρα)	1	2	5	10	20
$y\in B$ (σε €)	10	20	50	100	200

iii. Από τον πίνακα κατασκευάζουμε τα διατεταγμένα ζεύγη Α(1,10), Β(2,20), Γ(5,50), Δ(10,100) και Ε(20, 200). Ονομάζονται διατεταγμένα ζεύγη γιατί οι αριθμοί μέσα στην παρένθεση έχουν πάντα μια συγκεκριμένη σειρά. Πρώτος πάντα είναι ένας αριθμός από το πεδίο ορισμού και δεύτερος από το πεδίο τιμών. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται τετμημένη ο πρώτος και τεταγμένη ο δεύτερος. Και οι δύο μαζί συντεταγμένες. Κάθε ένα τέτοιο ζεύγος είναι και ένα σημείο (τελεία) πάνω στο σύστημα συνταγμένων.

iv. Για να σχεδιάσουμε αυτά τα σημεία πάνω στο σύστημα συντεταγμένων, π.χ. το Β(2, 20) αρχικά φέρουμε απο την τετμημένη 2 του οριζόντιου άξονα κάθετη στον άξονα ευθεία, μετά από την τεταγμένη 20 του κατακόρυφου άξονα φέρουμε κάθετη στον άξονα ευθεία. Στο σημείο που τέμνονται οι ευθείες που σχεδιάσαμε είναι το σημείο Β. Ζωγραφίζουμε μία τελεία και δίπλα γράφουμε Β(2,20). Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για όλα τα διατεταγμένα ζεύγη.

v. Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος συντεταγμένων και, αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου.

vi. Μετά μπορεί να ενώσουμε όλα αυτά τα σημεία με μία πολυγωνική γραμμή.

vii. Μπορεί όμως τα σημεία να είναι τόσο πυκνά που να σχηματίζουν από μόνα τους μια “συνεχόμενη” γραμμή.

18) Ονομάζουμε γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $\varphi(\chi)$ το σύνολο των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες $(x, y=\varphi(\chi))$

19) Τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται πάνω στον κατακόρυφο άξονα έχουν τετμημένη ίση με μηδέν, π.χ. τα σημεία Α(0,2), Β(0, 5), Γ(0, 10) βρίσκονται όλα πάνω στην κατακόρυφο άξονα.

20) Τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο άξονα έχουν τεταγμένη ίση με μηδέν, π.χ. τα σημεία Α(2,0), Β(5, 0), Γ(10, 0) βρίσκονται όλα πάνω στην οριζόντιο άξονα.

21) Το **συμμετρικό** ενός σημείου $A(x,y)$ ως

i. προς τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ είναι το $A_y=(-x,y)$

ii. προς τον οριζόντιο άξονα $x'x$ είναι το $A_x=(x,-y)$

iii. την αρχή των αξόνων Ο(0,0) είναι το $A_O=(-x,-y)$

22) Η **απόσταση** ενός σημείου $A(x_1,y_1)$ από ένα άλλο σημείο $B(x_2,y_2)$ υπολογίζεται από τον τύπο $AB=\sqrt{(y_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ και είναι αποτέλεσμα του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

23) Μια γραφική παράσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να γίνει η αντιστοίχηση μεταξύ των δυο μεγεθών της συνάρτησης. Τα δύο μεγέθη που συσχετίζει η συνάρτηση βρίσκονται το ένα πάνω στον οριζόντιο άξονα (η ανεξάρτητη μεταβλητή) και το άλλο πάνω στον κατακόρυφο άξονα (η εξαρτημένη μεταβλητή). Από ένα σημείο Α του κατακόρυφου ή του οριζόντιο άξονα σχεδιάζουμε ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα πάνω σε αυτόν τον άξονα μέχρι την γραφική παράσταση, από εκεί κατευθυνόμαστε κάθετα προς τον άλλο άξονα μέχρι να συμπέσουμε πάνω στο σημείο Β. Τα σημεία Α και Β είναι τα συσχετιζόμενα από την συνάρτηση σημεία. Βλέπε την εφαρμογή 4 του σχολικού βιβλίου στην σελίδα 63.

24) **Ανάλογα** είναι τα ποσά που όσο αυξάνεται το ένα τόσο αυξάνεται και το άλλο. Δηλαδή αν διπλασιάσουμε το ένα θα διπλασιαστεί και το άλλο. Ακόμα αν τριπλασιάσουμε το ένα θα τριπλασιαστεί και το άλλο κτλ, π.χ. αν από 4 κιλά ελιάς παίρνουμε ένα κιλό λάδι τότε από 8 κιλά ελιάς θα πάρουμε 2 κιλά λάδι κτλ. Γράφουμε

Τα 4 κιλά ελιάς δίνουν 1 κιλό λάδι
Τα 8 κιλά ελιάς δίνουν 2 κιλά λάδι.

Συνεχίζοντας, αν τα ποσά είναι ανάλογα, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα άγνωστο όπως το παράδειγμα που ακολουθεί. "Αν από 4 κιλά ελιές παίρνουμε 1 κιλό λάδι, πόσα κιλά ελιές χρειάζονται για να πάρουμε 20 κιλά λάδι". Κάνουμε κατάταξη και γράφουμε:

Τα 4 κιλά ελιάς δίνουν 1 κιλό λάδι
Τα x κιλά ελιάς δίνουν 20 κιλά λάδι.

Πολλαπλασιάζουμε χιαστί: $1\cdot x=4\cdot 20$ ή $x=80$ κιλά ελιές

Πρέπει να προσέχεται ώστε οι δύο προτάσεις που θα κατασκευάσετε να είναι ίδιες, δηλαδή κάτω από κάθε ποσό να υπάρχει ένα όμοιο και φυσικά οι μονάδες να είναι ίδιες.

25) Δύο ποσά λέγονται ανάλογα, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

26) Η συνάρτηση που συσχετίζει δύο ανάλογα ποσά είναι η $y=f(x)=ax$, π.χ. $y=3x$, $y=-2x$ κτλ. Ο αριθμός α ονομάζεται **κλίση**.

i. Η κλίση μας δείχνει πόσο "ανηφορική" ή "κατηφορική" είναι η συνάρτηση

ii. Όταν η κλίση είναι θετική η συνάρτηση βρίσκεται στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο

iii. Όταν η κλίση είναι αρνητική η συνάρτηση βρίσκεται στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο

iv. Για να υπολογίσουμε την κλίση διαιρούμε τα ποσά $\frac{y}{x}$

27) Η γραφική παράσταση των αναλόγων ποσών είναι πάντα ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

28) **Αντιστρόφως ανάλογα** είναι τα ποσά που όσο αυξάνεται το ένα τόσο ελαττώνεται και το άλλο. Δηλαδή αν διπλασιάσουμε το ένα, το άλλο θα υποδιπλασιαστεί. Ακόμα αν τριπλασιάσουμε το ένα, το άλλο θα υποτριπλασιαστεί κτλ, π.χ. αν 1 εργάτης τελειώνει το έργο σε 10 ημέρες τότε οι 2 εργάτες θα τελειώσουν το ίδιο έργο σε 5 ημέρες, κτλ. Γράφουμε

Ο 1 εργάτης τελειώνει την εργασία σε 10 ημέρες
Οι 2 εργάτες τελειώνουν την εργασία σε 5 ημέρες

Συνεχίζοντας, αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα άγνωστο όπως το παράδειγμα που ακολουθεί. "Αν από 2 εργάτες τελειώνουν μία εργασία σε 20 ημέρες πόσες ημέρες χρειάζονται 4 εργάτες για να ολοκληρώσουν την ίδια εργασία;". Κάνουμε κατάταξη και γράφουμε:

Ο 2 εργάτες τελειώνουν την εργασία σε 20 ημέρες
Οι 4 εργάτες τελειώνουν την εργασία σε x ημέρες

Πολλαπλασιάζουμε οριζόντια: $4\cdot x=2\cdot 20$ ή $4x=40$ ή $x=10$ ημέρες

Πρέπει να προσέχεται ώστε οι δύο προτάσεις που θα κατασκευάσετε να είναι ίδιες, δηλαδή κάτω από κάθε ποσό να υπάρχει ένα όμοιο και φυσικά οι μονάδες να είναι ίδιες.

29) Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους $x\cdot y$ είναι σταθερό.

30) Ο τύπος της συνάρτησης που συσχετίζει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά είναι η $y=f(x)=\frac{a}{x}$ με $x\neq 0$ και $\alpha\neq 0$

31) Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης ονομάζεται **υπερβολή** και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται

   i. στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο όταν $\alpha>0$

   ii. στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο όταν $\alpha<0$

32) Η γραφική παράσταση μια υπερβολής έχει 1) κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και 2) άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$

33) Για να αποφασίσετε αν δύο ποσά είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα θα πρέπει να στεφτείτε

   i. αν όσο αυξάνεται το ένα τόσο αυξάνεται και το άλλο ή

   ii. αν όσο αυξάνεται το ένα τόσο ελαττώνεται το άλλο,

   iii. μπορεί δύο ποσά να μην είναι ούτε ανάλογα ούτε αντιστρόφως ανάλογα.

34) Αν μας λέει ότι ένα ποσό x αυξάνεται κατά π.χ. 9 τότε γράφουμε $x+9$, ενώ αν λέει ότι ελαττώνεται κατά 9 γράφουμε $x-9$. Αν μας λέει ότι ένα ποσό αυξάνεται κατά 9% τότε γράφουμε $x=x+\frac{9}{100}x$, ενώ αν λέει ότι ελαττώνεται κατά 9% τότε γράφουμε $x=x-\frac{9}{100}x$

35) Το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά x είναι $E=x\cdot x=x^2$ ενώ η περίμετρος του είναι $\Pi=x+x+x+x=4x$

36) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και β είναι $E=\alpha\cdot\beta$ και η περίμετρος είναι $\Pi=\alpha+\alpha+\beta+\beta=2\alpha+2\beta$

37) Για να λύσουμε ένα τύπο της απλής μορφής $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ως προς π.χ. το δ αρχικά πολλαπλασιάζουμε χιαστί $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$ και μετά διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου $\delta=\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha}$,

   i. π.χ. για να λύσουμε τον τύπο $100=x\cdot y$ ως προς x διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου $x=\frac{100}{y}$

   ii. π.χ. για να λύσουμε ως προς Δt τον τύπο $\upsilon=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ που γράφεται $\frac{\upsilon}{1}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ αρχικά πολλαπλασιάζουμε χιαστί: $\upsilon\cdot\Delta t=\Delta x$ και μετά διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου: $\Delta t=\frac{\Delta x}{\upsilon}$.

Μάθημα 1 – Η έννοια της συνάρτησης

Άσκηση 223. Ένας εργαζόμενος με μισθό 800€ παίρνει αύξηση 2%.

   i. Ποια είναι η αύξηση του μισθού του σε ευρώ;

   ii. Πόσο είναι το τελικός μισθός του μετά την αύξηση;

Άσκηση 224. Ένας εργαζόμενος με μισθό x€ παίρνει αύξηση 2%.

   i. Ποια είναι η αύξηση του μισθού του σε ευρώ;

   ii. Πόσο είναι το τελικός μισθός του (y) μετά την αύξηση;

Άσκηση 225. Ο μισθός (x) ενός εργαζομένου αυξάνεται κατά 50€. Πόσος είναι ο τελικός του μισθός μετά την αύξηση.

Άσκηση 226. Ο μισθός (x) ενός εργαζομένου αυξάνεται κατά 5%. Πόσος είναι ο τελικός του μισθός μετά την αύξηση.

Άσκηση 227. Ένα τετράγωνο έχει πλευρά α, αν η πλευρά του αυξηθεί κατά 2 πόση θα είναι η νέα πλευρά του.

Άσκηση 228. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις α και β. Αν η μία διάσταση αυξηθεί κατά 5 και η άλλη ελαττωθεί κατά 2, πόσο θα είναι οι νέες διαστάσεις του;

Άσκηση 229. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά α και περίμετρο ίση με $y=\varphi(\alpha)=3\alpha$, πόσο θα γίνει η περίμετρος του αν διπλασιάσουμε την κάθε πλευρά του;

Άσκηση 230. Δίνεται μία συνάρτηση με τύπο $y=\varphi(\alpha)=2\alpha+3$. Αν το πεδίο ορισμού της είναι το $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών της.

Άσκηση 231. Δίνεται μία συνάρτηση με τύπο $y=f(\alpha)=\frac{2}{\alpha}$. Αν το πεδίο ορισμού της είναι το $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών της. Παρατηρείτε κάποιο πρόβλημα; Αν ναι να τροποποιήστε το πεδίο ορισμού ώστε να διορθώσετε το πρόβλημα.

Άσκηση 232. Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 2%.

i. Να εκφράσετε τους μισθούς x των υπαλλήλων πριν την αύξηση με τους μισθούς y των ίδιων υπαλλήλων μετά την αύξηση.

ii. Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης που κατασκευάσατε;

iii. Αν η εταιρεία απασχολεί πέντε υπαλλήλους που οι μισθοί τους πριν την αύξηση φαίνονται στον παρακάτω πίνακα να συμπληρώσετε τους μισθούς τους μετά την αύξηση.

x (€)	750	800	850	900	950
y=f(x) (€)					

iv. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

v. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της;

Μάθημα 2 – Γραφική παράστασης

Άσκηση 233. Να σχεδιάσετε κάθε ένα από τα παρακάτω σημεία στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

$A(2,3)$, $B(-2,3)$, $\Gamma(2,-3)$, $\Delta(-2,-3)$

Άσκηση 234. Να σχεδιάσετε κάθε ένα από τα παρακάτω σημεία στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

$A(0,0)$, $B(0,2)$, $\Gamma(2,0)$, $\Delta(-2,0)$

Άσκηση 235. Να βρείτε τα συμμετρικά ως προς τον x'x των παρακάτω σημείων:

i. $A(2,3)$, $B(-2,3)$, $\Gamma(2,-3)$, $\Delta(-2,-3)$

ii. $A(0,0)$, $B(0,2)$, $\Gamma(2,0)$, $\Delta(-2,0)$

iii. Να τα σχεδιάσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

Άσκηση 236. Να βρείτε τα συμμετρικά ως προς τον yy των παρακάτω σημείων:

i. $A(2,3)$, $B(-2,3)$, $\Gamma(2,-3)$, $\Delta(-2,-3)$

ii. $A(0,0)$, $B(0,2)$, $\Gamma(2,0)$, $\Delta(-2,0)$

iii. Να τα σχεδιάσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

Άσκηση 237. Να βρείτε τα συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ των παρακάτω σημείων:

i. $A(2,3)$, $B(-2,3)$, $\Gamma(2,-3)$, $\Delta(-2,-3)$

ii. $A(0,0)$, $B(0,2)$, $\Gamma(2,0)$, $\Delta(-2,0)$

iii. Να τα σχεδιάσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

Άσκηση 238. Να βρείτε την απόσταση ΑΒ των σημείων Α και Β στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Α(2,3) και Β(-2,3)

ii. Α(2,3) και Β(2,-3)

iii. Α(2,3) και Β(-2, -3)

iv. Σε όλες τις περιπτώσεις να κάνετε ένα σχήμα

Άσκηση 239. Να βρείτε την απόσταση ΑΒ των σημείων Α και Β στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Α(0,0) και Β(3,4)

ii. Α(3,5) και Β(5,1)

iii. Α(-2,1) και Β(2, -3)

iv. Σε όλες τις περιπτώσεις να κάνετε ένα σχήμα και να βρείτε την ζητούμενη απόσταση και με το Πυθαγόρειο θεώρημα

Άσκηση 240. (Τριγωνική ανισότητα). Δίνεται τρίγωνο με κορυφές Α(2,3), Β(-1, 3), Γ(-1, -1). Να συγκρίνεται τα παρακάτω μήκη:

i. ΑΓ+ΓΒ με το ΑΒ

ii. ΓΑ+ΑΒ με το ΓΒ

iii. ΓΒ+ΒΑ με το ΓΑ

Παρατηρείστε ότι το άθροισμα δύο πλευρών τους τριγώνου είναι πάντα μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά που περισσεύει.

Άσκηση 241. (Ελεύθερη πτώση). Αφήνεται μία μπάλα να πέσει από ένα ψηλό κτίριο χωρίς αρχική ταχύτητα μόνο με την επίδραση του βάρους. Αν σας δίνεται ότι η ταχύτητα είναι συνάρτηση του χρόνου με τύπο $\upsilon(t)=10\cdot t$ με t>=0, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και μετά να κάνετε την γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης.

$t[s]$	0	1	2	3	4
$\upsilon(t)[m/s]$					

Μάθημα 3 – Ανάλογα ποσά

Άσκηση 242. Αν μία μηχανή σε δύο ώρες συσκευάζει 100 δοχεία κρασί, πόσα δοχεία συσκευάζει σε 5 ώρες;

Άσκηση 243. Σε μία μεγάλη δεξαμενή υπάρχει ζαχαρόνερο περιεκτικότητας 3%w/w. Αν πάρουμε 10 κιλά από αυτό το διάλυμα πόση ζάχαρη και πόσο νερό θα βρούμε μέσα του;

Άσκηση 244. Ένας εργάτης χτίζει μέσα σε μία ώρα $1m^2$ τοιχοποιίας, πόσα τετραγωνικά μέτρα θα κτίσει σε 3.5 ώρες;

Άσκηση 245. Αν τα ποσά x και y είναι ανάλογα

i. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x		3	6		10
y	3	9		81	

ii. να υπολογίσετε την κλίση

iii. να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης

iv. να κάνετε την γραφική παράσταση

Άσκηση 246. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες y = 2 x και y = 3 x. Τι παρατηρείται;

Άσκηση 247. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $y=-2x$ και $y=-3x$. Τι παρατηρείται;

Άσκηση 248. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(1, 3)

Άσκηση 249. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 3.

Άσκηση 250. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(-2, 6)

Άσκηση 251. Ένα κατάστημα ρούχων κάνει έκπτωση στα προϊόντα κατά 20%.

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που εκφράζει την τιμή των προϊόντων μετά την έκπτωση (y) σε συνάρτηση με την τιμή που είχαν πριν να γίνει η έκπτωση.

ii. Να σχεδιάσετε την συνάρτησης

iii. Να υπολογίστε την κλίση της

iv. Εάν ένα προϊόν μετά την έκπτωση κοστίζει 160€ να υπολογίσετε με την βοήθεια του τύπου της συνάρτησης πόσο κόστιζε πριν να γίνει η έκπτωση.

Άσκηση 252. Μια δεξαμενή περιέχει ζαχαρόνερο περιεκτικότητας 3%w/w. Από αυτή την δεξαμενή παίρνουμε ένα δείγμα x γραμμαρίων που περιέχει μία ποσότητα ζάχαρης y γραμμαρίων.

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που συνδέει την ποσότητα της ζάχαρης σε γραμμάρια (y) με την ποσότητα του διαλύματος/δείγματος σε γραμμάρια (x) που πήραμε.

ii. Να βρείτε την κλίση. Τι παρατηρείται;

iii. Να κάνετε την γραφική παράσταση.

iv. Με την βοήθεια του τύπου της συνάρτησης να υπολογίστε το ποσό της ζάχαρης που περιέχετε σε ένα δείγμα 200 γραμμαρίων.

v. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να υπολογίστε την ποσότητα του δείγματος που πρέπει να πάρουμε ώστε αυτό να περιέχει 100 γραμμάρια ζάχαρης.

Άσκηση 253. Σε ένα όχημα η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω του είναι μηδέν κατά συνέπεια αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα και μέσα σε 2 δευτερόλεπτα έχει διανύσει διάστημα 10 μέτρων.

i. Να κατασκευάσετε τον τύπο μιας συνάρτησης που να συνδέει το διάστημα (S) με τον χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει αυτό το διάστημα.

ii. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

t (s)	1	2		6
s (m)		10	20	

iii. Ποια είναι η κλίση αυτής της συνάρτησης;

iv. Μπορούμε να πούμε ότι κλίση αυτής της ευθείας είναι ίση με την ταχύτητα του οχήματος;

v. Να κάνετε την γραφική παράσταση.

vi. Γραφικά, μπορούμε να πούμε ότι η κλίση είναι ίση με τον λόγο των δύο κάθετων πλευρών $\frac{y}{x}$;

Μάθημα 4 – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Άσκηση 254. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο πόλεις είναι ίση με S=100Km και ένα όχημα χρειάζεται χρόνο ίσο με 2h για να διανύσει αυτή την απόσταση.

i. Ποια είναι η ταχύτητα αυτού του οχήματος;

ii. Εάν ένα δεύτερο όχημα χρειάζεται χρόνο ίσο με 4 ώρες για να διανύσει αυτή την απόσταση ποια είναι τότε η ταχύτητά του;

iii. Μπορείτε να βρείτε τον τύπο μια συνάρτησης που να συνδέει την ταχύτητα ενός οχήματος (υ) με τον χρόνο (t) που χρειάζεται αυτό το όχημα για να διανύσει την απόσταση μεταξύ αυτών των πόλεων;

iv. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

t (s)	1	2		6
u (m/s)		50	25	

v. Να κάνετε την γραφική παράσταση για $t>0$

vi. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να υπολογίστε την ταχύτητα που πρέπει να έχει ένα όχημα ώστε να καλύψει την απόσταση των δύο πόλεων σε 5 ώρες.

vii. Εάν ένα όχημα τρέχει με 40 km/h πόσο χρόνο χρειάζεται για να καλύψει την απόσταση των δύο πόλεων;

Άσκηση 255. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις:

$y=\frac{3}{x}$ και $y=\frac{5}{x}$

$y=-\frac{3}{x}$ και $y=-\frac{5}{x}$

$y=\frac{0.5}{x}$ και $y=\frac{0.9}{x}$

Στατιστική

Θεωρία

1) Το σύνολο όλων των στοιχείων που μελετάμε ως προς ένα χαρακτηριστικό ονομάζεται **πληθυσμός**, π.χ. το σύνολο των μαθητών που διαγωνίστηκαν στο πανελλαδικός εξεταζόμενο μάθημα των μαθηματικών, δηλαδή όλοι οι μαθητές που εξετάστηκαν στις πανελλαδικές του 2024 στα μαθηματικά είναι ο πληθυσμός. Μπορεί να εξετάστηκαν 100.000 μαθητές και μαθήτριες.
2) Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού ονομάζεται **μεταβλητή**. Στο προηγούμενο παράδειγμα έστω x η μεταβλητή που είναι ο βαθμός που πείρε κάθε μαθητής στα Μαθηματικά. Αφού έχουμε 100.000 μαθητές θα υπάρχουν και 100.000 αντίστοιχοι βαθμοί.
3) **Δείγμα** είναι ένα μέρος του πληθυσμού, π.χ. στο παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να επιλέξουμε τους μαθητές ενός συγκεκριμένου σχολείου και να καταγράψουμε την βαθμολογία μόνο αυτών των μαθητών. Το σχολείο αυτό μπορεί π.χ. να έχει 120 μαθητές.
4) **Δειγματοληψία** ή **δημοσκόπηση** είναι η μέθοδος με την οποία διαλέγουμε ένα συγκεκριμένο δείγμα.
5) Ένα δείγμα είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού όταν είναι σωστά διαλεγμένο ώστε να αντιπροσωπεύει όλον τον πληθυσμό, δηλαδή τα αποτελέσματα των μετρήσεων του δείγματος να είναι ίσια με τα αποτελέσματα των μετρήσεων όλου του πληθυσμού. Αν μπορούμε να πετύχουμε αυτήν την προϋπόθεση δεν χρειάζεται να ρωτήσουμε όλο τον πληθυσμό (π.χ. 100.000 μαθητές) αλλά μόνο το αντιπροσωπευτικό του δείγμα (π.χ. 120 μαθητές) και να έχουμε τα ίδια αποτελέσματα.
6) Τα αποτελέσματα μια δημοσκόπησης μπορούμε να αναπαραστήσουμε γραφικά με εικονογράμματα, ραβδογράμματα, κυκλικά διαγράμματα και χρονογράμματα.
7) Για να βρούμε τη **μέση τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων, προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.
8) Για να υπολογίσουμε την **διάμεσο** των παρατηρήσεων μας
   i. Γράφουμε τις παρατηρήσεις μας με αύξουσα σειρά
   ii. Αν ο αριθμός των παρατηρήσεων μας είναι περιττός αριθμός η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή
   iii. Αν ο αριθμός των παρατηρήσεων μας είναι άρτιος αριθμός η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δυο μεσαίων παρατηρήσεων.

Μάθημα 1 – Πληθυσμός, δείγμα

Άσκηση 256. Πριν ανακοινωθούν τα συνολικά αποτελέσματα των εκλογών οι υπηρεσίες δημοσκόπησης διεξάγουν μία δημοσκόπησης ανοικτής κάλπης όπως λέγεται. Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Α) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι

i. όλοι οι Έλληνες πολίτες
ii. μόνο οι άνδρες
iii. μόνο οι γυναίκες
iv. μόνο οι πολίτες που έχουν κατοικία την πρωτεύουσα

Β) Η μεταβλητή της έρευνας είναι

i. ποιο χρώμα τους αρέσει
ii. ποιο κόμμα ψήφισαν
iii. πως ονομάζονται
iv. πόσα παιδιά έχουν

Γ) Το μέγεθος του δείγματος είναι

i. όλοι οι Έλληνες πολίτες

ii. οι πολίτες της Αθήνας και της Θεσσαλονίκης

iii. 2000 πολίτες που θεωρούνται ότι αντιπροσωπεύουν τον πληθυσμό της έρευνας

iv. οι μαθητές όλης της χώρας

Άσκηση 257. Σκοπεύετε να εκδώσετε και να πωλήσετε μια σχολική εφημερίδα στους μαθητές του σχολείου σας, αλλά πριν το κάνετε θέλετε να γνωρίζεται αν το εγχείρημα σας θα πετύχει, δηλαδή αν η εφημερίδα θα έχει απήχηση στο σχολείο σας και θα πουλήσει πολλά φύλα με συνέπεια και έχετε υψηλά κέρδη. Για το λόγο αυτό θέλετε να κάνετε μια δημοσκόπηση.

Α) ο πληθυσμός της έρευνας είναι

i. όλοι μαθητές όλων των σχολείων της περιοχής σας

ii. όλοι οι μαθητές του σχολείου σας

iii. όλοι οι μαθητές της Ελλάδας

iv. οι μαθητές της τάξης σας.

Β) Το δείγμα της έρευνας είναι

i. μόνο τα αγόρια

ii. μόνο τα κορίτσια

iii. μόνο οι μαθητές του τμήμα σας

iv. κάποιοι τυχαία επιλεγμένοι μαθητές από όλα τα τμήματα και όλες τις τάξης του σχολείου σας.

Γ) Η μεταβλητή του δείγματος είναι

i. αν ενδιαφέρει τους μαθητές να διαβάζουν μια σχολική εφημερίδα

ii. αν τους αρέσουν τα βιντεοπαιχνίδια

iii. ποια είναι η ηλικία τους.

iv. ποιο είναι το αγαπημένο τους χρώμα.

Άσκηση 258. Να υπολογίστε

το 100% του 23

το 50% του 300

το 25% του 200

το 35% του 80

Άσκηση 259. Σε μια έρευνα κλήθηκαν να διαλέξουν 3000 μαθητές ποιο μάθημα προτιμούν. Τα 500 από αυτά τα παιδιά απάντησαν ότι τους αρέσουν τα Μαθηματικά και τα 600 ότι τους αρέσει η Φυσικά και το 650 ότι τους αρέσουν τα Αρχαία Ελληνικά. Να υπολογίστε τα ποσοστά των μαθητών που τους αρέσουν τα παραπάνω μαθήματα.

Μάθημα 2 – Γραφικές παραστάσεις

Άσκηση 260. Κάνατε μία έρευνα για τις αγαπημένες ασχολίες των συμμαθητών σας στον ελεύθερο χρόνο τους. Ρωτήσατε 22 μαθητές. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας τα καταγράψατε στον παρακάτω πίνακα.

Ασχολία	Αριθμός Μαθητών
Πεζοπορία	11
Παιδική χαρά -πάρκο	9
Φωτογράφιση	3
Χορός	12
Κατασκευές	13
Αστρονομία	4
Δημοσκοπήσεις	2
Κηπουρική	8
Δημιουργία συλλογών	5

Λάβετε υπόψη σας ότι μερικοί μαθητές μπορεί να έχουν περισσότερες από μία δημιουργικές ασχολίες.

Να κατασκευάσετε ένα διάγραμμα που να αναπαριστά αυτά τα δεδομένα με μορφή

i. εικονογράμματος

ii. ραβδογράμματος

Άσκηση 261. Η τριμηνιαία σχολική εφημερίδα που εκδίδετε τα τελευταία 10 τρίμηνα έχει πουλήσει κάθε τρίμηνο τον παρακάτω αριθμό φύλλων:

5, 15, 25, 37, 59, 48, 47, 60, 55, 58

Με μορφή χρονογράμματος να αναπαραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα.

Άσκηση 262. Μέχρι τώρα έχετε κατασκευάσει τέσσερις διαφορετικές συλλογές που αριθμούν τα παρακάτω αντικείμενα

Συλλογή	Αριθμός Αντικειμένων
Φωτογραφίες πουλιών	32
Συνταγές	73
Βιβλία	102
Επιτραπέζια παιχνίδια	14

i. Πόσα συνολικά αντικείμενα έχουν όλες οι συλλογές σας

ii. Να κατασκευάσετε ένα κυκλικό διάγραμμα που να αναπαριστά των αριθμό των αντικειμένων ανά συλλογή.

Μάθημα 3 – Μέση τιμή, διάμεσος

Άσκηση 263. Δύο μαθητές Α και Β συλλέγουν αντικείμενα για τις παρακάτω συλλογές που διατηρούν.

Συλλογή	Α	Β
Δοκιμασμένες συνταγές	43	36
Φωτογραφίσεις φυτών	90	95
Βιβλία	45	50
Επίσκεψη και φωτογράφιση αξιοθέατων	39	41
Επιτραπέζια παιχνίδια	30	29
Συγγραφή άρθρων για την σχολική εφημερίδα	27	31
Φωτογραφίσεις πουλιών	12	9

i. Να βρείτε την μέση τιμή των αντικειμένων ανά συλλογή για του μαθητές Α και Β. Τι μπορεί να σημαίνει αυτό το αποτέλεσμα;

ii. Να βρείτε την διάμεσο των αντικειμένων ανά συλλογή για τους μαθητές Α και Β. Τι μπορεί να σημαίνει αυτό το αποτέλεσμα;

Άσκηση 264. Κάθε μέρα πριν φύγετε για το σχολείο καταγράφετε την θερμοκρασία που έχει το δωμάτιό σας. Τα αποτελέσματα των τελευταίων 30 ημερών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

16, 17, 17, 18, 16, 18, 19, 20, 19, 19, 20, 20, 19, 16, 16, 17, 16, 18, 20, 19, 19, 18, 17, 16, 15, 18, 19, 17, 19, 20

i. Με την βοήθεια μας αριθμομηχανής να υπολογίστε την μέση τιμή αυτών των μετρήσεων. Τι μπορεί να σημαίνει αυτό το αποτέλεσμα;

ii. Να υπολογίσετε την διάμεσο αυτών των μετρήσεων. Τι μπορεί να σημαίνει αυτό το αποτέλεσμα;