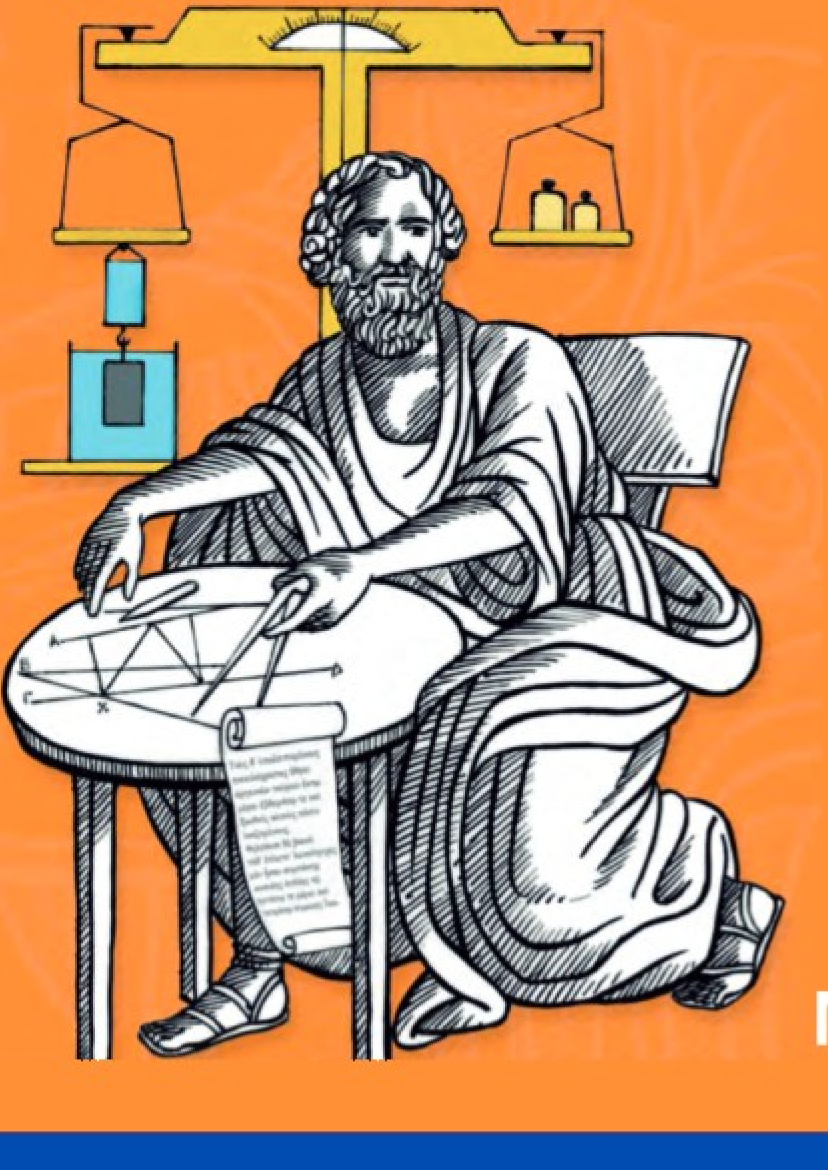
Μαθηματικά

Γ' Γυμνασίου

Κουμουνδούρος Γιάννης



Μέρος Α'

Ασκήσεις και Θεωρία

Πίνακας περιεχομένων

Πρόλογος

Τα μαθηματικά της Γ’ Γυμνασίου είναι ένα εύκολο μάθημα με την προϋπόθεση ότι ήσουν καλός μαθητής και στις προηγούμενες τάξεις. Αυτό όμως είναι μια πάρα πολύ καλή και σπάνια προϋπόθεση που αν υπάρχει είναι ευχής έργον. Το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών έχει αφήσει κενά στις προηγούμενες τάξεις.

Αυτό ακριβώς, να συμπληρώσει αυτά τα κενά, αλλά και να διδάξει την ύλη της Γ’ Γυμνασίου και ίσως με μερικούς μαθητές να δούμε μία σειρά από δύσκολες και υψηλού βαθμού δυσκολίας ασκήσεις για την τάξη αυτή.

Στις σημειώσεις αυτές κύριο μέλημα είναι να γίνουν οι ασκήσεις του βιβλίου, καθώς το θεωρώ ως το καλύτερο σύγγραμα για τους μαθητές του σχολείου.

Φυσικά, τα μαθήματα που διδάσκω είναι εξατομικευμένα, επομένως οι σημειώσεις αυτές θα παραδοθούν με ειδικό τρόπο σε κάθε μαθητή.

Φιλικά,

Κουμουνδούρος Γιάννης

Σπάρτη, 24 Οκτωβρίου 2023

[1.1A] Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Θεωρία

1) Το σύνολο $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ περιέχει τους **φυσικούς** αριθμούς.
2) Το σύνολο $\mathbb{Z}=\{\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ περιέχει τους **ακέραιους** αριθμούς.
3) Οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν με την μορφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$ με $\nu\neq 0$ ονομάζονται **ρητοί** αριθμοί και το σύνολο που τους περιέχει συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.
4) Ο αριθμοί που δεν είναι ρητοί ονομάζονται **άρρητοι**, παραδείγματα τέτοιων αριθμών είναι το $\pi=3.14\ldots$, $e=2{,}718\ldots$, $\sqrt{2}$, κτλ
5) Το σύνολο όλων των παραπάνω αριθμών ονομάζεται σύνολο των **πραγματικών αριθμών** περιέχει δηλαδή τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς. Συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.
6) Ο **άξονας** των πραγματικών αριθμών είναι μία ευθεία (χωρίς αρχή και τέλος). Η ευθεία αυτή αποτελείται από διαδοχικά σημεία το ένα δίπλα στο άλλο. Κάθε σημείο αναπαριστά και έναν πραγματικό αριθμό. Αφού τα σημεία της ευθείας είναι άπειρα, θα είναι άπειροι και οι αριθμοί. Το σημείο με τον αριθμό μηδέν 0 ονομάζεται **αρχή** του άξονα. Ο άξονας αυτός έχει προσανατολισμό, που είναι ένα βέλος που γράφουμε προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί αυξάνονται προς στα δεξιά. Αυτό ονομάζεται και διάταξη.
7) Αλγεβρικά η **απόλυτη τιμή ενός** αριθμού ορίζεται ώς:
   $|x|=\begin{cases} x, \alpha\nu\ x\geq 0 \\ -x, \alpha\nu\ x<0 \end{cases}$,
   ενώ γραφικά είναι η **απόσταση** του αριθμού από το μηδέν (την αρχή του άξονα).
8) Για κάθε αριθμό είναι $|x|\geq 0$
9) Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ονομάζεται **άθροισμα** ενώ οι αριθμοί που προσθέτουμε ονομάζονται **προσθετέοι** ή **όροι**.
10) **Για να προσθέσουμε δύο αριθμούς** παίρνουμε πρόσημο από τον αριθμό με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και εάν οι αριθμοί είναι ομόσημοι τους προσθέτουμε ενώ εάν είναι ετερόσημοι τους αφαιρούμε.
11) Η πρόσθεση έχει τις παρακάτω ιδιότητες: (**ιδιότητες της πρόσθεσης**)
    1. **Αντιμεταθετική** ιδιότητα η οποία με λέει ότι δεν έχει σημασία με ποια σειρά θα προσθέσουμε τους δύο προσθετέους, έχει τύπο: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.
    2. **Προσεταιριστική** ιδιότητα που μας λέει ότι εάν έχουμε τρεις προσθετέους μπορούμε να τους προσθέσουμε με όποια σειρά θέλουμε, με τύπο $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.
    3. **Ουδέτερο στοιχείο**, που είναι ο αριθμός μηδέν, οποίος όταν προστεθεί σε οποιαδήποτε άλλον αριθμό δίνει πάλη τον ίδιο αριθμό. Έχει τύπο $\alpha+0=\alpha$.

4. Ο **αντίθετος** ενός αριθμού α είναι ο $-\alpha$ με την ιδιότητα $\alpha+(-\alpha)=0$.

12) Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ονομάζεται **γινόμενο** ενώ οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε ονομάζονται **παράγοντες**.

13) **Για να κάνουμε πολλαπλασιασμό** υπολογίζουμε αρχικά το πρόσημο. Αν οι παράγοντες είναι ομόσημοι τότε παίρνουμε θετικό πρόσημο ενώ εάν οι παράγοντες είναι ετερόσημοι τότε παίρνουμε αρνητικό πρόσημο. Τέλος κάνουμε κανονικά τον πολλαπλασιασμό.

14) Ο πολλαπλασιασμός έχει τις παρακάτω ιδιότητες.(**Ιδιότητες του πολ/σμού**)

   1. **Αντιμεταθετική** ιδιότητα η οποία με λέει ότι δεν έχει σημασία με ποια σειρά θα πολλαπλασιάσουμε τους δύο παράγοντες, έχει τύπο: $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$.
   2. **Προσεταιριστική** ιδιότητα που μας λέει ότι εάν έχουμε τρεις παράγοντες μπορούμε να τους πολλαπλασιάσουμε με όποια σειρά θέλουμε, με τύπο $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.
   3. **Ουδέτερο στοιχείο**, που είναι ο αριθμός 1, οποίος όταν πολλαπλασιαστεί σε οποιαδήποτε άλλον αριθμό δίνει πάλη τον ίδιο αριθμό. Έχει τύπο $\alpha\cdot 1=\alpha$.
   4. Ο **αντίστροφος** ενός αριθμού α είναι ο $\frac{1}{\alpha}$ με την ιδιότητα $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$.

15) Η **επιμεριστική ιδιότητα** είναι κοινή ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης. Αλγεβρικά γράφουμε: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$. Ακόμα έχουμε $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$ κ.τ.λ.

16) Προσοχή πρέπει να δίνουμε όταν έχουμε διαιρέσεις

   1. $(\alpha\pm\beta):\gamma=\alpha:\gamma\pm\beta:\gamma$ ή $\frac{\alpha\pm\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}\pm\frac{\beta}{\gamma}$
   2. Δεν επιτρέπεται η $\gamma:(\alpha\pm\beta)=\gamma:\alpha\pm\gamma:\beta$

17) Για να υπολογίσουμε τον αντίθετο (x) ενός αριθμού (α) αρκεί να λύσουμε την εξίσωση: $\alpha+x=0$. Ενώ για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο (x) ενός αριθμού (α) αρκεί να λύσουμε την εξίσωση: $\alpha\cdot x=1$.

18) **Οι πράξεις είναι δύο**: η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός. Ορίζουμε την αφαίρεση και την διαίρεση με την βοήθεια των δύο παραπάνω.

19) Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης $\alpha-\beta$ ονομάζεται **διαφορά** ενώ οι δύο αριθμοί που αφαιρούμε ονομάζονται **μειωτέος** ο πρώτος (α) και **αφαιρετέος** ο δεύτερος (β). Για να κάνουμε αφαίρεση προσθέτουμε στην μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου: $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

20) Το αποτέλεσμα τη διαίρεσης $\frac{\alpha}{\beta}$ ονομάζεται και **λόγος**, συμβολίζεται δε με την μορφή κλάσματος. Ο αριθμητής του κλάσματος (α) είναι ο **διαιρετέος** ενώ ο παρανομαστής (β) είναι ο **διαιρέτης**. Για να κάνουμε διαίρεση πολλαπλασιάζουμε στον διαιρετέο τον

αντίστροφο του διαιρέτη: $\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$. Εάν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της **Ευκλείδειας διαίρεσης** θα υπολογίζουμε το **πηλίκο** (π) και το **υπόλοιπο** (υ). Ισχύει η ιδιότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $\alpha=\beta\cdot\pi+\upsilon$.

21) **Κλάσμα** είναι ένας αριθμός της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\beta\neq 0$. Το α ονομάζεται αριθμητής και το β παρανομαστής.

22) **Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα** διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του αριθμητή και του παρανομαστή. Το κλάσμα που δεν απλοποιείται περισσότερο ονομάζεται **ανάγωγο**.

23) **Για να προσθέσουμε δύο κλάσματα** πρέπει να είναι ομώνυμα δηλαδή να έχουν ίδιο παρανομαστή. Για να κάνουμε δύο κλάσματα ομώνυμα χρησιμοποιούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δύο παρανομαστών. Για να ολοκληρώσουμε την πρόσθεση πρέπει να προσθέσουμε τους δύο αριθμητές και να βάλουμε σαν παρανομαστή τον κοινό παρανομαστή των δύο κλασμάτων.

24) **Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα** πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και τους παρανομαστές των δύο κλασμάτων.

25) **Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα** αλλάζουμε την διαίρεση σε πολλαπλασιασμό και αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα.

26) **Λόγος** δύο αριθμών είναι το κλάσμα $\frac{x}{y}$ με $y\neq 0$.

27) **Αναλογία** είναι η ισότητα δύο λόγων: $\frac{x}{y}=\frac{\varphi}{\omega}$, $x\cdot\omega\neq 0$, οι αριθμητές ονομάζονται και **ηγούμενοι όροι** ενώ οι παρανομαστές και **επόμενοι όροι**. Ακόμα τα x και ω ονομάζονται **άκροι** και οι y και φ **μέσοι όροι**.

28) Οι αναλογίες έχουν τις παρακάτω **ιδιότητες**:

1. $\frac{x}{y}=\frac{\varphi}{\omega}\Leftrightarrow x\cdot\omega=y\cdot\varphi$
2. $\frac{x}{y}=\frac{\varphi}{\omega}\Leftrightarrow\frac{\omega}{y}=\frac{\varphi}{x}$ ή $\frac{x}{\varphi}=\frac{y}{\omega}$ ή $\frac{\omega}{\varphi}=\frac{y}{x}$, δηλαδή μετακινώ τις μεταβλητές διαγώνια.
3. $\frac{x}{y}=\frac{\varphi}{\omega}\Leftrightarrow\frac{x\pm y}{y}=\frac{\varphi\pm\omega}{\omega}$ ή $\frac{x}{y\pm x}=\frac{\varphi}{\omega\pm\varphi}$, δηλαδή προσθέτω τους αριθμητές ή τους παρανομαστές.
4. $\frac{x}{y}=\frac{\varphi}{\omega}=\frac{x+\varphi}{y+\omega}$

29) Οι πράξει γίνονται με την παρακάτω **προτεραιότητα**:

1. Παρενθέσεις

2. Απόλυτες τιμές
3. Δυνάμεις
4. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις
5. Προσθέσεις και αφαιρέσεις

30) Δύο αριθμοί ονομάζονται **ομόσημοι** όταν έχουν ίδιο πρόσημο, ισχύει $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0, \beta \neq 0$. Ενώ ονομάζονται **ετερόσημοι** όταν έχουν αντίθετο πρόσημο, ισχύει ότι $\alpha \cdot \beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0, \beta \neq 0$

31) Το **μηδέν** (0) δεν έχει πρόσημο, ούτε αντίθετο και αντίστροφο. Ότι πολλαπλασιάζουμε με το μηδέν δίνει αποτέλεσμα μηδέν και ότι προσθέτουμε με το μηδέν δίνει ως αποτέλεσμα τον ίδιο τον αριθμό που προσθέτουμε.

32) Όταν μπροστά από μία παρένθεση υπάρχει το – τότε βγάζουμε την παρένθεση αλλάζοντας όλα τα πρόσημα μέσα στην παρένθεση.

33) Το γινόμενο άρτιου πλήθους παραγόντων έχει θετικό πρόσημο ενώ το γινόμενο περιττού πλήθους παραγόντων έχει αρνητικό πρόσημο.

34) Ένας δεκαδικός αριθμός με άπειρο αριθμό δεκαδικών ψηφίων όπου ένα τμήμα αυτών των ψηφίων επαναλαμβάνεται ονομάζεται απειροψήφιος περιοδικός δεκαδικός αριθμός ή απλά **περιοδικός αριθμός**, π.χ. $0.34565656... = 0.34\overline{56}$ Οι αριθμοί αυτοί είναι ρητοί και μπορούν να γραφούν με την μορφή κλάσματος. Για να γίνει η μετατροπή σε κλάσμα ακολουθούμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

1. Έστω α ο περιοδικός αριθμός
2. Εντοπίζουμε το πρώτο και το δεύτερο μέρος της περιόδου.
3. Πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλες δυνάμεις του 10 ώστε η υποδιαστολή να βρεθεί μπροστά από το πρώτο και το δεύτερο μέρος της περιόδου.
4. Αφαιρούμε τις δύο σχέσεις

35) Ακολουθεί ένα παράδειγμα μετατροπής του αριθμού 0.3456565656…

1. Έστω α=0.34565656…
2. Η περίοδος είναι το 56 και πρώτη φορά εμφανίζεται στο 0.34565656… και δεύτερη φορά στο 0.34565656…
3. Πολλαπλασιάζουμε με 100 και 10000 αντίστοιχα: $100\alpha = 34.565656...$ και $10000\alpha = 3456.565656...$
4. Αφαιρούμε κατά μέλη αυτές τις δύο σχέσεις: $10000\alpha - 100\alpha = 3422$ ή $9900\alpha = 3422$ ή $\alpha = \frac{3422}{9900}$

36) Για να υπολογίσουμε τον μέσο όρο ή μέση τιμή ενός πλήθους δεδομένων αρκεί να τα προσθέσουμε και να διαιρέσουμε με το πλήθος τους, π.χ. αν στο μάθημα των μαθηματικών έχετε πάρει τους βαθμούς 13, 15, 12, 14 και 15 τότε η μέση τιμή αυτών των βαθμολογιών είναι $\frac{13+15+12+14+15}{5}=\frac{12\cdot 1+13\cdot 1+14\cdot 1+15\cdot 2}{5}=\frac{69}{5}=13.8$

37) Σε κάθε σημείο ενός άξονα έχουμε αντιστοιχίσει και έναν αριθμό, που είναι η απόσταση του σημείου από την αρχή. Τον αριθμό αυτό μπορούμε να τον ονομάζουμε “μέτρο της θέσης” ή και **θέση**. Έτσι εάν ένα αυτοκίνητο βρίσκεται κάποια χρονική στιγμή σε κάποιο σημείο του άξονα, το σημείο αυτό θα το ονομάζουμε θέση του αυτοκινήτου. Αργότερα θα δούμε ότι η θέση είναι ένα διάνυσμα (βέλος) που έχει αρχή το σημείο αναφοράς (αρχή του άξονα) και πέρας το σημείο στο οποίο βρίσκεται το αυτοκίνητο. Τα διανύσματα έχουν μέτρο (=μήκος), διεύθυνση (=ευ-θεία) και φορά (=προσανατολισμός).

38) Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα αυτοκίνητο βρίσκεται αρχικά στην θέση Ο(0km). Βλέπε το σχήμα στην σελίδα 15 του σχολικού. Το αυτοκίνητο μετακινείται προς τα αριστερά στην θέση Β(-4km) και μετά προς τα δεξιά στην θέση Γ(5Km). Το συνολικό **διάστημα** που έχει διανύσει το όχημα είναι η συνολική απόσταση που έχει κάνει σε όλη την διαδρομή, δηλαδή 4km προς τα αριστερά και 9km προς τα δεξιά, συνολικά 13km. Το διάστημα είναι μονόμετρο μέγεθος.

39) Στο παραπάνω παράδειγμα αν το όχημα ξεκινούσε από την αρχική θέση Ο(0km) και κατευθυνόταν κατευθείαν προς την τελική θέση Γ(5km) τότε θα έκανε μόνο 5km. Αυτό είναι το μέτρο της **μετατόπισης**. Αργότερα θα δούμε ότι η μετατόπιση είναι ένα διανυσματικό μέγεθος (βέλος) που έχει αρχή το σημείο όπου ξεκινάει την κίνηση το όχημα και τέλος το σημείο όπου τελειώνει την κίνηση το όχημα.

40) Η έκφραση $x\cdot y\neq 0$ σημαίνει ότι το $x\neq 0$ και ταυτόχρονα το $y\neq 0$

41) Η έκφραση $x\cdot y>0$ σημαίνει ότι οι αριθμοί x και y είναι ομόσημοι.

42) Η έκφραση $x\cdot y<0$ σημαίνει ότι οι αριθμοί x και y είναι ετερόσημοι.

43) Η έκφραση $x\cdot y=0$ σημαίνει ότι $x=0$ ή $y=0$.

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) Δίνονται οι αριθμοί 1 , -2 , 0.6 , $\sqrt{2}$, $2/3$, $\sqrt{25}$, $|-3|$, π , e , $συν(30^o)$. Να γράψετε ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι φυσικοί ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι και πραγματικοί. Προσοχή κάποιοι αριθμοί μπορεί να ανήκουν σε δυο σύνολα.

2) Να τοποθετήσετε πάνω στο άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 0, 1 , -2 , 0.6 , $\sqrt{2}$, $2/3$, $\sqrt{25}$, $|-3|$, π , e , $συν(30^o)$

3) Να υπολογίσετε τις απόλυτες τιμές:
   i. $|2|$, $|-2|$, $|-2+3|$, $|-2|+|4|$
   ii. $-3+|-2|$, $|-2+|-3|+2|$
   iii. $||-2-3||$

4) Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

i. $2\cdot5$, $-2\cdot5$, $-2\cdot(-5)$, $2\cdot(-5)$
ii. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$, $\frac{2}{-4}\cdot\frac{-5}{-4}$

5) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
i. $2+5$, $-2+5$, $-2-5$, $2-5$
ii. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$, $\frac{2}{-4}+\frac{-5}{-4}$

6) Να κάνετε τις πράξεις:
i. $2+4+5$, $2-4+5$, $-2-4+5$, $-2-4-5$, $2+4-5$
ii. $2\cdot4\cdot5$, $-2\cdot4\cdot5$, $2\cdot(-4)\cdot5$

7) Να κάνετε τις πράξεις:
i. $-1\cdot(-1)$
ii. $-1\cdot(-1)\cdot(-1)$
iii. $-1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$
iv. $-1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$
v. $-1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$

8) Να κάνετε τις πράξεις:
i. $4\cdot(5+6)$, $4\cdot(3-5)$
ii. $-4\cdot(-3+4)$, $-5\cdot(6-5)$

9) Να κάνετε τις πράξεις:
i. $5\cdot7+5\cdot3$
ii. $-5\cdot7-5\cdot3$
iii. $6\cdot7+3\cdot6$

10) Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.
i. $(1+3)(4+5)$, $(-3+4)(7-4)$
ii. $(4-2)(6-3)$, $(3+2-1)(3-4)$
iii. $2(3-4)+(3+4+1)(4+2-6)$

11) Να κάνετε τις πράξεις, διαγράφοντας τους αντίθετους.
i. $-2+2$,
ii. $-2+3+2$,
iii. $-3-5+3+5$,
iv. $-5+2023+5-2023+7$

12) Να κάνετε τις πράξεις λαμβάνοντας υπόψιν τους αντίστροφους:
i. $3\cdot\frac{1}{3}$,
ii. $4\cdot(-\frac{1}{4})$
iii. $3\cdot4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$
iv. $3\cdot(-4)\cdot(-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{4}$

13) Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:
i. Ποιο είναι το πρόσημο ενός γινομένου που έχει πέντε αρνητικούς παράγοντες;
ii. Μπορεί το αποτέλεσμα της απόλυτης τιμής να είναι αρνητικός αριθμός;
iii. Μπορεί το αποτέλεσμα της απόλυτης τιμής να είναι μη αρνητικό;
iv. Η πρόταση που ακολουθεί είναι αληθής ή ψευδής; “Εάν $\frac{\alpha}{\beta}=1$, τότε $\alpha=\beta$.”

Μάθημα 2

1) Να μετατρέψετε σε μορφή κλάσματος τους αριθμούς $0.3333\ldots$, $1.3333\ldots$, $0.56666\ldots$
2) *(Ερώτηση 1 σχολικού σελ 14).* Δίνονται οι αριθμοί -3 , $\frac{1}{2}$, 6 , $0.\overline{3}$, -0.8 , $\sqrt{3}$, $\sqrt{16}$, 3.14 , π , $\frac{22}{7}$. Να γράψετε ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι φυσικοί ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι και πραγματικοί. Προσοχή κάποιοι αριθμοί μπορεί να ανήκουν σε περισσότερα σύνολα.
3) *(Ερώτηση 2 σχολικού σελ 14).* Να κάνετε τις πράξεις:
i. $-3+7$, $-6+6$, $-2-9$
ii. $(-2)\cdot\frac{1}{3}$, $0\cdot(-\frac{2}{7})$, $(-\frac{4}{5})\cdot(-\frac{5}{4})$
iii. $(-6):(-\frac{12}{5})$, $(-\frac{8}{5}):(+4)$, $(-\frac{4}{3}):(+\frac{4}{3})$.
4) Να κάνετε τις πράξεις με την σειρά που πρέπει.
i. $(-3)\cdot4+2$, $4\cdot(-6)-4\cdot(-2)$
ii. $(-2):(-1)+4\cdot(-2)$
5) *(Ασκηση 1 σχολικού σελ 15).* Να κάνετε τις πράξεις:
i. $2+3\cdot4-12:(-4)+1$
ii. $2+3\cdot(4-12):(-4+1)$
iii. $-3\cdot(-2)-5+4:(-2)-6$
iv. $-8:(-3+5)-4\cdot(-2+6)$
6) *(Ασκηση 2 σχολικού σελ 15).* Να κάνετε τις πράξεις:

i. $-(5-4)-(+2)+(-6+4)-(-7)$
ii. $4-(-2+6-3)+(-9+6)$
iii. $14+(-6+5-3)-(-4-1)\cdot(-2)$
iv. $(-3)\cdot(-2)+4-(+5)-(-1):(-1)$

7) Ένα αυτοκίνητο ξεκίνησε από την θέση Ο(0), κινήθηκε πάνω στον άξονα x’x προς τα αριστερά στη θέση Β(-4km) και στη συνέχεια προς τα δεξιά στη θέση Γ(5km). Να βρείτε πόσο διάστημα διήνυσε το αυτοκίνητο και πόσο μετακινήθηκε από την αρχική του θέση

8) *(Ασκηση 4 σχολικού σελ 16).* Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\frac{2}{3}-(-\frac{1}{4})+(-\frac{1}{2})-(+\frac{1}{12})$

ii. $-(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6})+(-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{11}{6})$

iii. $-5\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-5\cdot(\frac{1}{2}-\frac{2}{3})$

iv. $(1-\frac{7}{2})\cdot(\frac{1}{2}-\frac{4}{5})-\frac{3}{5}:(-\frac{2}{5}+\frac{2}{3})$

9) *(Ασκηση 5 σχολικού σελ 16).* Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1}{3-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}$

ii. $\dfrac{-2\cdot3-\frac{1}{4}}{-2\cdot(3-\frac{1}{4})}$

iii. $-7+\dfrac{-3-\frac{1}{3}}{-2+\frac{1}{3}}$

10) *(Ερώτηση 4 σχολικού σελ 15).* Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε:
i. είναι ομόσημοι,
ii. έχουν ίσες απόλυτες τιμές,
iii. έχουν γινόμενο μηδέν,
iv. έχουν γινόμενο την μονάδα.

11) *(Ερώτηση 4 σχολικού σελ 15).* Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε:
i. είναι ετερόσημοι,
ii. έχουν άθροισμα μηδέν,
iii. έχουν ίσες απόλυτες τιμές,
iv. έχουν γινόμενο τη μονάδα.

Μάθημα 3

1) Να γίνουν οι πράξεις:

i. $(-2+4)\cdot(-3)+1$

ii. $-(-3-(-2+3)-4)+2$

iii. $(-22):2+11\cdot2$

2) Να γίνουν οι πράξεις:

i. $\frac{3}{4}-(-\frac{4}{2})+\frac{6}{8}$

ii. $\frac{7}{8}-\frac{5}{4}+3-1$

iii. $(-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-3)-(-\frac{7}{3}-\frac{2}{8})$

3) Να γίνουν οι επιμεριστικές ιδιότητες

i. $3\cdot(2-5)$, $6\cdot(-6-7)$

ii. $-4\cdot(-3-5)$, $-6\cdot(-6+5-1)$

iii. $5\cdot(-4)+5\cdot(-6)$

iv. $4\cdot(-3)+4\cdot(-2)+4\cdot(-5)$

4) Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.
i. $(1+3)(4+5)$, $(-3+4)(7-4)$
ii. $(4-2)(6-3)$, $(3+2-1)(3-4)$
iii. $2(3-4)+(3+4+1)(4+2-6)$

5) Χωρίς να γίνουν οι πράξεις να βρείτε τα πρόσημα:

i. $4\cdot(-3)\cdot(-4)$

ii. $1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$

6) Να γίνουν οι πράξεις:

i. $\dfrac{\frac{9}{5}-2+\frac{1}{4}}{\frac{2}{10}+3+\frac{1}{5}}$

ii. $-10-\dfrac{-3+\frac{1}{6}}{-2+\frac{2}{5}}$

7) Αφού κάνετε τις πράξεις στην παράσταση Α που ακολουθεί να υπολογίσετε τον αντίστροφο και τον αντίθετο της παράστασης.

$$A=\frac{-1+\frac{1}{2}}{4-\frac{2}{3}}-\frac{(\frac{1}{3}-1):(-2)}{(\frac{1}{5}+2):(-5)}-(-4):\frac{1}{5}$$

8) Αφού κάνετε τις πράξεις στην παράσταση Α που ακολουθεί να υπολογίσετε τον αντίστροφο και τον αντίθετο της παράστασης.

$$A=-2\cdot|4-5|+|-2+3|-\left|4-7+\frac{3}{4}\right|$$

9) *(Άσκηση 8 σχολικό σελ 16).* Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

i. $8-(\alpha-\beta)+(\alpha-5-\beta)=3$

ii. $2-(\alpha+\beta-\gamma)-(4+\gamma-\beta)+2+\alpha=0$

iii. $-2\cdot(\alpha-3)+\alpha\cdot(-7+9)-3\cdot(+2)=0$

10) *(Άσκηση 6, σχολικό, σελ 16).* Οι ελάχιστες θερμοκρασίες μιας πόλης το πρώτο δεκαήμερο του έτους ήταν: 1, –3, 0, 2, 1, –2, –5, 0, –3, –1. Να βρείτε τη μέση ελάχιστη θερμοκρασία της πόλης το δεκαήμερο αυτό.

Μάθημα 4

1) Ένα όχημα κινείται προς τα αριστερά πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο και την αρχική χρονική στιγμή t_0=0 βρίσκεται στην θέση Α(2km). Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα βρίσκεται στην θέση Β(-5km). Μετά αλλάζει κατεύθυνση κίνησης και κινείται προς τα δεξιά μέχρι την θέση Γ(6km). Να υπολογίσετε το διάστημα που έχει διατρέξει το όχημα καθώς και το μέτρο της μετατόπισης.

2) Δίνονται οι αριθμοί -1, 0, 1.5, $0.34\bar{5}$. Να τους μετατρέψετε σε ομώνυμα κλάσματα (ρητούς) να τους τοποθετήσετε πάνω σε έναν άξονα.

3) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $-2\cdot(-3+4\cdot(3-5)-5)+3\cdot(-6)$

ii. $2\cdot(-3-|(-4)|)-(-3+4\cdot(-3-5))$

iii. $\frac{2}{3}\cdot(\frac{5}{2}-\frac{6}{5}-\frac{|-4|}{2})$

iv. $-\frac{-2}{5}-\frac{-5}{2}$

4) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $(2\alpha-3\beta+\gamma)-(\alpha-2\beta+\gamma)+4\beta$

ii. $\alpha-2(\beta-\gamma)-(-(3\beta-4\gamma)+2(3\beta-2\gamma+\alpha)-4\beta)$

iii. $8(\beta-\gamma)-\{-[\alpha-\beta-3(\gamma-\beta+\alpha)]\}$

iv. $-\{-[-(-x)]\}-[-(-y)]$

5) Αν $xy\neq 0$ να κάνετε τις πράξεις:

i. $x\cdot\frac{1}{x}$

ii. $x\cdot(\frac{1}{x}+\frac{2}{x})$

iii. $x\cdot y\cdot(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$

6) Αν οι αριθμοί x και y είναι αντίστροφοι να βρείτε την τιμή των παραστάσεων

i. $x\cdot y$

ii. $2\cdot x\cdot 3\cdot y$

7) Αν $x\cdot y>0$ απλοποιείστε τις παραστάσεις:

i. $|x+y|$

ii. $|x|+|y|$

8) Να διαλέξετε την σωστή απάντηση στην ερώτηση που ακολουθεί. Αν $x>0$ και $y>0$ τότε η παράσταση $|x+y|$ είναι:

i. θετική,

ii. αρνητική,

iii. θετική ή μηδέν,

iv. μηδέν,

v. τίποτα από τα παραπάνω.

9) Να διαλέξετε την σωστή απάντηση στην ερώτηση που ακολουθεί. Αν $x<0$ και $y>0$ τότε η παράσταση $|x+y|$ είναι:

i. μη αρνητική

ii. θετική

iii. μηδέν

iv. τίποτα από τα παραπάνω.

Μάθημα 5

1) Υπολογίστε:

i. $\frac{2\cdot(-6)-(-4)\cdot(-3)}{-(-3\cdot(-3)-6\cdot(-1))}$

ii. $\frac{2:(-2\cdot(-5)+(-3)\cdot(-1))}{-2-(2+4-6\cdot(-1)):(-(-2))}$

2) Βρείτε τον αντίθετο και τον αντίστροφο των αριθμών:

i. $-\frac{1}{2}-(-(-\frac{1}{2}-\frac{-1}{-2}))$

ii. $(1-\frac{7}{3})\cdot(\frac{2}{4}-\frac{3}{2})-\frac{4}{2}:(-\frac{5}{6}+\frac{9}{12})$

3) Αν $x+y=10$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $x+y$

ii. $2\cdot(x+y)$

iii. $2\cdot(-7)+2\cdot(-3)$

iv. $2\cdot x+2\cdot y$

4) *(Άσκηση 9, σχολικό, σελ 16).* Αν $x+y=-5$ και $\omega+\varphi=-7$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $A=4-(x-\omega)-(y-\varphi)$

ii. $B=-(-5-x+\varphi)+(-8+y)-(\omega-4)$

5) Αν α και β είναι οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου, που έχει περίμετρο 56, τότε ποια αλγεβρική σχέση μπορούμε να γράψουμε;

6) Αν α και β είναι οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου, που έχει εμβαδόν 56, τότε ποια αλγεβρική σχέση μπορούμε να γράψουμε;

7) *(Άσκηση 10, σχολικού, σελ 16).* Αν α και β είναι οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου, που έχει περίμετρο 56 και γ,δ οι διαστάσεις ενός άλλου ορθογωνίου με περίμετρο 32, να υπολογίσετε την παράσταση $A=\alpha-(9-2\gamma)-(15-\beta-2\delta)$.

8) Αν $x\cdot y=0$ και $x\neq 0$ τότε να δείξετε ότι $y=0$. Υπόδειξη: (α) πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη της υπόθεσης με $\frac{1}{x}$, (β) εφαρμόστε την προσεταιριστική ιδιότητα.

9) Διαλέξτε την σωστή απάντηση στην ερώτηση που ακολουθεί. Αν $x>0$ και $y>0$ τότε η σχέση $x+y$ είναι:

i. μη αρνητική

ii. θετική

iii. μηδέν

iv. αρνητική

v. τίποτα από τα παραπάνω

10) Διαλέξτε την σωστή απάντηση στην ερώτηση που ακολουθεί. Αν $x<0$ και $y<0$ τότε η σχέση $x+y$ είναι:

i. μη θετική

ii. θετική

iii. μηδέν

iv. αρνητική

v. όλα τα παραπάνω

11) Δίνεται η παράσταση $A=-x$.

i. Τι τιμή (αποτέλεσμα) έχει η παράσταση Α για $x=1$.

ii. Τι τιμή έχει η παράσταση Α για $x=-1$.

iii. Τι τιμή έχει η παράσταση Α για $x=0$.

iv. Τι πρόσημο έχει η παράσταση Α για $x<0$

12) Αν $A=3+4\alpha$ και $B=-3-5\alpha$, να υπολογίσετε:

i. την τιμή της παράστασης Α+Β

ii. τον αντίστροφο του Α+Β

iii. τον αντίθετο του Α+Β

iv. τι πρόσημο έχει η παράσταση $|A+B|$ για $\alpha\neq0$.

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Δίνονται οι αριθμοί 1 , -2 , 0.6 , $\sqrt{2}$, $2/3$, $\sqrt{25}$, $|-3|$, π , e , $συν(30^o)$. Να γράψετε ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι φυσικοί ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι και πραγματικοί. Προσοχή κάποιοι αριθμοί μπορεί να ανήκουν σε δυο σύνολα.

2) Να κάνετε τις πράξεις:
   i. $4\cdot(5+6)$, $4\cdot(3-5)$
   ii. $-4\cdot(-3+4)$, $-5\cdot(6-5)$
   iii. $2(3-4)+(3+4+1)(4+2-6)$
   iv. $1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$

3) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{\frac{9}{5}-2+\frac{1}{4}}{\frac{2}{10}+3+\frac{1}{5}}$$

4) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $(2\alpha-3\beta+\gamma)-(\alpha-2\beta+\gamma)+4\beta$

ii. $8(\beta-\gamma)-\{-[\alpha-\beta-3(\gamma-\beta+\alpha)]\}$

5) Να διαλέξετε την σωστή απάντηση στην ερώτηση που ακολουθεί. Αν $x<0$ και $y>0$ τότε η παράσταση $|x+y|$ είναι:

i. μη αρνητική

ii. θετική

iii. μηδέν

iv. τίποτα από τα παραπάνω.

Κριτήριο 2

1) Αν $A=3+4\alpha$ και $B=-3-5\alpha$, να υπολογίσετε:

i. την τιμή της παράστασης Α+Β

ii. τον αντίστροφο του Α+Β

iii. τον αντίθετο του Α+Β

iv. τι πρόσημο έχει η παράσταση $|A+B|$ για $\alpha \neq 0$.

2) Ένα όχημα κινείται προς τα αριστερά πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο και την αρχική χρονική στιγμή t_0=0 βρίσκεται στην θέση Α(2km). Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα βρίσκεται στην θέση Β(-5km). Μετά αλλάζει κατεύθυνση κίνησης και κινείται προς τα δεξιά μέχρι την θέση Γ(6km). Να υπολογίσετε το διάστημα που έχει διατρέξει το όχημα καθώς και το μέτρο της μετατόπισης.

3) Κάνετε τις πράξεις:

$$A=\frac{-1+\frac{1}{2}}{4-\frac{2}{3}}-\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right):(-2)}{\left(\frac{1}{5}+2\right):(-5)}-(-4):\frac{1}{5}$$

4) Να υπολογίσετε τις απόλυτες τιμές:
i. $|2|$, $|-2|$, $|-2+3|$, $|-2|+|4|$
ii. $-3+|-2|$, $|-2+|-3|+2|$
iii. $||-2-3||$

5) Τι σημαίνει η έκφραση $\alpha \cdot \beta > 0$;

[1.1Β] Δυνάμεις

Θεωρία

1) Η **δύναμη** με **βάση** έναν πραγματικό αριθμό α και **εκθέτη** ένα φυσικό αριθμό ν ορίζεται όπως παρακάτω:

    i. $\alpha^0=1$ με $\alpha\neq 0$, π.χ.

    ii. $\alpha^1=\alpha$

    iii. $\alpha^\nu=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha$ με $\nu\geq 2$

    iv. $\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^\nu}$ με $\alpha\neq 0$

2) Δηλαδή το 2^3 είναι μια δύναμη που έχει βάση το 2 και εκθέτη το 3.

3) Οι δυνάμεις έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

    i. $\alpha^\mu\cdot\beta^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$

    ii. $\alpha^\mu:\beta^\nu=\alpha^{\mu-\nu}$

    iii. $(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\mu$

    iv. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$

    v. $(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}$

    vi. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

4) Δεν ορίζεται η δύναμη 0^0 .

5) Δεν ορίζεται η δύναμη 0^ν όταν το $\nu<0$ γιατί έχουμε διαίρεση με το μηδέν, π.χ. $0^{-2}=\dfrac{1}{0^2}$

6) Όταν η βάση είναι θετική $\alpha>0$ τότε για οποιοδήποτε εκθέτη $\nu\in\mathbb{N}$ η δύναμη α^ν είναι θετική $\alpha^\nu>0$

7) Όταν $\alpha<0$, τότε όταν ο $\nu\in\mathbb{N}$ είναι άρτιος η δύναμη είναι $\alpha^\nu>0$, ενώ όταν ο ν είναι περιττός τότε $\alpha^\nu<0$

8) Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha\cdot 10^\nu$, δηλαδή ως γινόμενο ενός αριθμού α επί μια δύναμη του 10. Τη μορφή αυτή την ονομάζουμε **τυποποιημένη**. Ο αριθμός α είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10.

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) Να γράψετε τους αριθμούς 1, 0.2, 0.125, 0.75, 0.6 με την μορφή ανάγωγου κλάσματος.

2) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

   i. 2^3, 3^2, $(-2)^3$, $(-1)^2$

   ii. 2^2, $(-2)^2$, -2^2

   iii. 2^0, $(-2)^0$, -2^0

   iv. 2^{-1}, 3^{-2}, -2^{-2}, $(-2)^{-2}$

   v. $2^3\cdot 5$, $4-(-2)^2$, $3\cdot 2-(-2)\cdot(-5)^2$

   vi. $|2^3|$, $|-2^3|$, $|-2|^3$, $|(-2)^3|$

3) *(Ερώτηση 3, σχολικό, σελ 18).* Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

   i. $(-2)^2\cdot(-3)+2\cdot 3^2-5^2\cdot(-2):5-6$

   ii. $(2\cdot 5-32)+2\cdot(23-4)-12:(-3)$

4) Να κάνετε τις πράξεις:

   i. $\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{6}\right)^2$

   ii. $\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^2+\frac{3}{6}$

   iii. $-5\cdot\left(-\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right)+\frac{4}{2}:\frac{5}{4}$

5) Υπολογίστε:

   i. $\dfrac{(-3)^2\cdot 2^2+2\cdot 3^2:2}{-2^2-3^2-(-2)^2}+3$,

   ii. $\dfrac{(-2)^2-2^2+3}{3\cdot(-3+4)^2\cdot\dfrac{-3^3+3^3-4}{2\cdot 4+3^2}}$

6) Να διαλέξετε την σωστή απάντηση στην επόμενη πρόταση. Η τιμή (αποτέλεσμα) της σχέσης 0^{-3} είναι:

   i. 1

   ii. -1

   iii. 0

   iv. κάποιος άλλος πραγματικός αριθμός που μπορώ να υπολογίσω

   v. η τιμή αυτής της σχέσης δεν ορίζεται αφού προκύπτει διαίρεση με το μηδέν.

7) *(Ερώτηση 1, σχολικό, σελ 18).* Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

   i. Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha=\alpha^4$.

   ii. Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=\alpha^4$.

   iii. Οι αριθμοί $(-5)^6$ και -5^6 είναι αντίθετοι.

   iv. Οι αριθμοί $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ και $\left(\frac{3}{2}\right)^8$ είναι αντίστροφοι.

   v. Για κάθε αριθμό α ισχύει $(3\alpha)^2=9\alpha^2$.

   vi. Ο αριθμός $-(-5)^2$ είναι θετικός.

   vii. Ο αριθμός -3^{-2} είναι θετικός.

8) Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς ως δυνάμεις με βάση το 2:

   i. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

ii. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

9) Να γράψετε τις παρακάτω δυνάμεις με θετικό εκθέτη:

i. $2^{-3}, \frac{1}{2^{-3}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

ii. $3^{-2}, \frac{1}{4^{-3}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

10) Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς ως δύναμη του 10

i. 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000

ii. 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001

11) Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή.

i. 14, 234, 11000, 340, 20000000

ii. 0.1. 0.000034, 0.000000345

iii. 23.56, 1.456, 5674.6895

Μάθημα 2

1) *(Ερώτηση 4, σχολικό, σελ19).* Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της πρώτης στήλης με αυτά της δεύτερης.

Στήλη Α	Στήλη Β
(α) $(2^4)^{-1}$	(1) $\frac{1}{4}$
(β) $(2^{-5})^2 \cdot 2^{10}$	(2) -2^4
(γ) $(-2)^{-2}$	(3) 4
(δ) $(2^4 : 2^3) \cdot 2^2$	(4) 2^3
	(5) 2^{-4}
	(6) 1

2) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(-1)^6, 3^{-2}, -4^2, \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}, 5^{-2}$

ii. $\left(\frac{2}{5}\right)^0, \left(-\frac{1}{5}\right)^0, (7+2)^2, 7^2+2^2$

3) Αφού κάνετε τις πράξεις να γράψετε τι παρατηρείτε:

i. $(3+4)^2, 3^2+4^2, 3^2+4^2+2\cdot 3\cdot 4$

ii. $(1+3)^2, 1^2+3^2, 1^2+3^2+2\cdot 1\cdot 3$

iii. $(3-4)^2, 3^2-4^2, 3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4$

iv. $(1-3)^2, 1^2-3^2, 1^2+3^2-2\cdot 1\cdot 3$

4) *(Άσκηση 4, σχολικό, σελ 19).* Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

i. $A=3\cdot(-2)^2+4-(-7)^0\cdot 2 -8\cdot(2^{-1}-1)-2\cdot 3^2$

ii. $B=(-4)^2 : 2-5-(-3)\cdot 2^2-(-2)^4$

5) *(Άσκηση 1, σχολικό, σελ 19).* Με την βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:

i. $2^{-5}\cdot 2^8, 3^4 : 3^{-2}, 2^3\cdot 5^3, (5^{-2})^{-4}$

ii. $3^{-2}\cdot(-3)^4, \frac{(-6)^6}{2^6}$

6) Να μετατρέψετε τις δυνάμεις στην ίδια βάση:

i. (με βάση το 2): $1, 4^2, 8^3, 16^4, 16^3, 64^2, 8^{-2}, 4^{-5}$

ii. (με βάση το 3): $1, 9^2, 27^4, 81^5, 9^{-2}, 27^{-2}, 81^{-10}$

iii. (με βάση το 5): $1, 25^3, 125^2, 125^{-2}$

7) *(Άσκηση 1 και 2, σχολικό, σελ 19).* Αφού μετατρέψετε τις δυνάμεις στην ίδια βάση να εφαρμόσετε τις ιδιότητες ώστε να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη.

i. $4^2 : 4^4, 27\cdot 3^4 \cdot \frac{1}{3^5}$

ii. $(2^{-2})^3 \cdot 2^8$, $(-3)^2 \cdot (-3)^{-4}$

iii. $(0.75)^{-2} \cdot (\frac{3}{4})^2$, $36^3 : (-12)^3$

iv. $(2.5)^4 \cdot (-4)^4$, $4^{12} : 2^{20}$

v. $(-\frac{2}{3})^{12} \cdot (\frac{2}{3})^{-14}$, $(0.01)^3 \cdot 10^5$

8) Πότε δεν ορίζεται η δύναμη με εκθέτη το μηδέν;

9) Να διαλέξετε την σωστή απάντηση στην ερώτηση που ακολουθεί. Αν $\alpha > 0$ και ν άρτιος τότε η ποσότητα $(-\alpha)^\nu$ είναι ίση με:

i. 1,

ii. $-\alpha^\nu$

iii. α^ν

iv. $-(-\alpha^\nu)$

v. με α^ν και $-(-\alpha^\nu)$

10) Να διαλέξετε την σωστή απάντηση στην ερώτηση που ακολουθεί. Αν ν είναι άρτιος τότε η ποσότητα $(-1)^\nu$ είναι ίση με:

i. 1

ii. ν

iii. -1^ν

iv. όλα τα παραπάνω.

Μάθημα 3

1) Αφού μετατρέψετε τις δυνάμεις στην ίδια βάση να εφαρμόσετε τις ιδιότητες ώστε να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη.

i. $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot (\frac{1}{4})^2$, $3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot (\frac{1}{9})^5$

ii. $(\frac{1}{25})^6 \cdot 5^3 \cdot 25^2 \cdot 125$,

iii. $2^{-3} \cdot (2^{-2})^{-3}$, $3^{42} \cdot (3^6)^{-7}$

iv. $2 : (4 \cdot (\frac{1}{4})^{-2})$

2) Αφού μετατρέψετε τις δυνάμεις στην ίδια βάση να εφαρμόσετε τις ιδιότητες ώστε να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη.

i. $\left[(-\frac{1}{2})^{-2}\right]^{-4} : \left[(-\frac{1}{2})^{5}\right]^{-4}$

ii. $\dfrac{[-3^{-2}]^3[(-9)^{-2}]}{(-9)^3(-3)^2}$

3) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\dfrac{1-3 \cdot (\frac{2}{3})^0}{-2}$

ii. $\dfrac{2^{-3}+(\frac{3}{4})^{-4} \cdot (\frac{-1}{2})^2}{(\frac{1}{6})^0 - 12 \cdot 3^{-3}}$

4) Να υπολογίσετε την παράσταση:

i. $A = 27 \cdot [3^{-2} : (2^2 : 3^3 - 2^4 : \frac{7}{16})] - 4^2$

ii. να υπολογίσετε την $|A|$, καθώς και

iii. τον αντίστροφο της Α,

iv. τον αντίθετο της Α.

5) *(Άσκηση 3, σχολικό, σελ 19).* Με την βοήθεια των δυνάμεων να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:

i. $(x^2)^3 \cdot 5x^4$, $(xy^3)^2 \cdot x^3 y$

ii. $(-2x)^2 \cdot (-2x^2)$, $(-\frac{2}{3}x)^3 : x^2$

iii. $(-3x^2)^3\cdot(-2x^3)^2$, $\frac{3}{-2}x^3:(-\frac{3}{2}x)^2$

6) *(Άσκηση 5, σχολικό, σελ 19).* Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου, πόσες φορές μεγαλώνει το εμβαδόν του;

7) Να υπολογίσετε τα πρόσημα στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $(-1)^{2023}$, $-5\cdot(-2)^{1020}$

ii. -1^{2024} , $-5\cdot(-1^{1020})$

8) Να υπολογίστε τα πρόσημα (αν υπάρχουν) στις παρακάτω περιπτώσεις. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να διατυπώσετε κάποιον γενικό κανόνα;

i. $(-2)^2+(+3)^2$

ii. $(-2)^2+(-3)^2$

iii. $(+2)^2+(+3)^2$

iv. $(+2)^2+(-3)^2$

v. $0^2+(-2)^2$

vi. $0^2+(+2)^2$

vii. 0^2+0^2

9) Για τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει η βάση α και ο εκθέτης ν να απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Πότε η δύναμη α^ν είναι αρνητική;

ii. Πότε η δύναμη α^ν είναι θετική;

iii. Πότε η δύναμη α^ν είναι μηδέν;

iv. Πότε η δύναμη α^ν είναι ίση με 1;

v. Τι γίνεται αν ο εκθέτης γίνει ένας πολύ μεγάλος αριθμός ($+\infty$)

vi. Τι γίνεται αν ο εκθέτης γίνει ένας πολύ μικρός αριθμός ($-\infty$)

vii. Μπορεί ο εκθέτης να είναι ένας ρητός αριθμός, π.χ. $\frac{2}{3}$;

Μάθημα 4

1) Να απλοποιήσετε τις παρακάτω εκφράσεις με την βοήθεια των ιδιοτήτων:

i. $0.125^2\cdot2^6$, $0.2^3\cdot125^2$, $12^2\cdot0.25^4\cdot6^4$

ii. $0.3^2\cdot90^{-3}\cdot10^5$, $0.6^{-4}\cdot60^4\cdot10^{-4}$

2) Να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή οι παρακάτω αριθμοί:

i. 0.000001, 234.56577, 9.2323

3) Να γίνουν οι πράξεις:

$$A=5\cdot(x-4y+6)-x\cdot[-2\cdot(-4+y)+3\cdot(x-1+7y)]$$

4) Αν $x,y\neq0$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=x^5\cdot[(x^4\cdot y)^{-1}:(x^0\cdot y^4)^6]$ και να υπολογίσετε την τιμή της για $x=-0.2$ και $y=5$.

5) Αν $x,y,z\neq0$ να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:

$$A=\left(\frac{4x^3y}{2z^{-1}}\right)^2\cdot\left(\frac{-3xy^{-3}}{6z^2}:\frac{5x^3y^2z}{125y^{-2}}\right)$$

και να βρείτε την αριθμητική τιμή της για x= 0.125 , $y=1$, $z=2$

6) Να βρεθεί ο αντίθετος και ο αντίστροφος του αριθμού:

$$A=\frac{3+\frac{4}{x-\frac{5}{6}}}{5+\frac{2}{x}}$$

7) Αν ισχύει η αναλογία: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{x}{y}$ για $\beta\cdot y\neq0$ τότε να επιλέξετε τις ισοδύναμες παραστάσεις από τις παρακάτω:

i. $\alpha \cdot y=\beta \cdot x$

ii. $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{x+y}{y}$

iii. $\frac{\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{x}{y-x}$

iv. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{x}{y}=\frac{\alpha+x}{\beta+y}$

8) Με την βοήθεια της παράστασης $F=(-2)^x$ να κατασκευάσετε ένα πίνακα όπου να αντιστοιχίσετε τους αριθμούς $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$ με τα αποτελέσματα (τιμές) της F

9) Σε κάθε μία περίπτωση αφού κάνετε τις πράξεις να διατυπώσετε έναν κανόνα:

i. $(1+3)^2$, $1^2+3^2+2\cdot1\cdot3$

ii. $(1-3)^2$, $1^2+3^2-2\cdot1\cdot3$

iii. $(1-3)(1+3)$, 1^2-3^2

iv. $(1+2)^3$, $1^3+3\cdot1^2\cdot2+3\cdot1\cdot2^2+2^3$

10) Να εξετάσετε το πρόσημο της παράστασης α^ν για τις διάφορες τιμές του α και του ν

11) Να εξετάσετε πότε ορίζετε η δύναμη 0^ν με $\nu\in\mathbb{Z}$. Στις περιπτώσεις που ορίζεται να βρείτε το αποτέλεσμα και το πρόσημο.

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i. 2^3, 3^2, $(-2)^3$, $(-1)^2$

ii. 2^2, $(-2)^2$, -2^2

iii. 2^0, $(-2)^0$, -2^0

iv. 2^{-1}, 3^{-2}, -2^{-2}, $(-2)^{-2}$

v. $2^3\cdot5$, $4-(-2)^2$, $3\cdot2-(-2)\cdot(-5)^2$

vi. $|2^3|$, $|-2^3|$, $|-2|^3$, $|(-2)^3|$

2) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

i. Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha=\alpha^4$.

ii. Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=\alpha^4$.

iii. Οι αριθμοί $(-5)^6$ και -5^6 είναι αντίθετοι.

iv. Οι αριθμοί $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ και $\left(\frac{3}{2}\right)^8$ είναι αντίστροφοι.

v. Για κάθε αριθμό α ισχύει $(3\alpha)^2=9\alpha^2$.

vi. Ο αριθμός $-(-5)^2$ είναι θετικός.

vii. Ο αριθμός -3^{-2} είναι θετικός.

3) Να υπολογίσετε την παράσταση:

i. $A=27\cdot[3^{-2}:(2^2:3^3-2^4:\frac{7}{16})]-4^2$

ii. να υπολογίσετε την $|A|$, καθώς και

iii. τον αντίστροφο της Α,

iv. τον αντίθετο της Α.

4) Αφού μετατρέψετε τις δυνάμεις στην ίδια βάση να εφαρμόσετε τις ιδιότητες ώστε να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη.

i. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-4} : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}\right]^{-4}$

ii. $\frac{[-3^{-2}]^{3}[(-9)^{-2}]}{(-9)^{3}(-3)^{2}}$

Κριτήριο 2

1) Για τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει η βάση α και ο εκθέτης ν να απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Πότε η δύναμη α^{ν} είναι αρνητική;

ii. Πότε η δύναμη α^{ν} είναι θετική;

iii. Πότε η δύναμη α^{ν} είναι μηδέν;

iv. Πότε η δύναμη α^{ν} είναι ίση με 1;

v. Τι γίνεται αν ο εκθέτης γίνει ένας πολύ μεγάλος αριθμός ($+\infty$)

vi. Τι γίνεται αν ο εκθέτης γίνει ένας πολύ μικρός αριθμός ($-\infty$)

vii. Μπορεί ο εκθέτης να είναι ένας ρητός αριθμός, π.χ. $\frac{2}{3}$;

2) Αν $x, y \neq 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = x^{5} \cdot [(x^{4} \cdot y)^{-1} : (x^{0} \cdot y^{4})^{6}]$ και να υπολογίσετε την τιμή της για $x = -0.2$ και $y = 5$.

3) Αν $x, y, z \neq 0$ να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:

$$A = \left(\frac{4x^{3}y}{2z^{-1}}\right)^{2} \cdot \left(\frac{-3xy^{-3}}{6z^{2}} : \frac{5x^{3}y^{2}z}{125y^{-2}}\right)$$

και να βρείτε την αριθμητική τιμή της για x= 0.125 , $y = 1$, $z = 2$

4) Αν ισχύει η αναλογία: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{y}$ για $\beta \cdot y \neq 0$ τότε να επιλέξετε τις ισοδύναμες παραστάσεις από τις παρακάτω:

i. $\alpha \cdot y = \beta \cdot x$

ii. $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{x + y}{y}$

iii. $\frac{\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{x}{y - x}$

iv. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{y} = \frac{\alpha + x}{\beta + y}$

[1.1Γ] Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Θεωρία

1) Η **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x. Δηλαδή:

   i. $x \in \mathbb{R}$ και $x \geq 0$

   ii. Όταν το $x<0$ δεν ορίζεται η ρίζα $\sqrt{x}$.

   iii. $\sqrt{x} \geq 0$

   iv. Το αποτέλεσμα (τιμή) της $\sqrt{x}$ δεν μπορεί ποτέ να είναι αρνητικό.

   v. Ακόμα, $\sqrt{x^2}=|x|$, εδώ το x μπορεί να πάρει ότι τιμή θέλουμε (θετική, μηδέν, αρνητική)

   vi. Ακόμα για $x \geq 0$ είναι $(\sqrt{x})^2=x$, εδώ το x παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές.

   vii. Ο συμβολισμός $(\sqrt{x})^2$ είναι ίδιος με τον $\sqrt{x}^2$, αλλά διαφορετικός από τον $\sqrt{x^2}$. Δηλαδή το τετράγωνο στις πρώτες δύο περιπτώσεις είναι έξω από την ρίζα ενώ στην τρίτη είναι μέσα στην ρίζα.

2) Οι ρίζες έχουν τις παρακάτω **ιδιότητες**:

   i. $\sqrt{x \cdot y}=\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

   ii. $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, με $y>0$

3) Οι ιδιότητα $\sqrt{x \cdot y}=\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ **αποδεικνύεται** ως εξής:

   i. Υψώνουμε στο τετράγωνο κάθε μέλος: $(\sqrt{x \cdot y})^2=(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y})^2$

   ii. Στο δεύτερο μέλος εφαρμόζουμε την ιδιότητα των δυνάμεων: $(\sqrt{x \cdot y})^2=(\sqrt{x})^2 \cdot (\sqrt{y})^2$

   iii. Απλοποιούμε τα τετράγωνα με τις ρίζες: $x \cdot y=x \cdot y$

   iv. Επομένως αφού (α) αυτές οι πράξεις γίνονται και προς την αντίθετη κατεύθυνση και (β) η τελευταία σχέση είναι αληθής, θα είναι αληθής και όλες, δηλαδή και η πρώτη που μας ενδιαφέρει!

   v. Με ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

4) Προφανώς δεν ισχύουν τα παρακάτω

   i. $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

   ii. $\sqrt{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

5) Οι παραστάσεις $(x+y)$ και $(x-y)$ ονομάζονται **συζυγείς**. Εάν κάνουμε τον πολλαπλασιασμό είναι: $(x+y)(x-y)=xx-xy+yx+yy=x^2-y^2$

6) **Πυθαγόρειο θεώρημα**: Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) Να υπολογίσετε τα τετράγωνα των αριθμών: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

2) Να υπολογίστε τις τετραγωνικές ρίζες:
   i. $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{144}$.
   ii. $\sqrt{0.04}$, $\sqrt{0.0004}$, $\sqrt{0.0016}$

3) Να αναλύσετε τους παρακάτω αριθμούς σε γινόμενο δύο παραγόντων όπου ο ένας από αυτούς να είναι ο 1, 4, 9, 16, 25 , …
   i. 45, 12, 8, 75, 72, 27, 18, 40

4) Να απλοποιήσετε τις ρίζες:
   i. $\sqrt{45}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{40}$

5) Να κάνετε, αν γίνονται, τις προσθέσεις:
   i. $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$, $6\sqrt{5}+24\sqrt{5}$,
   ii. $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}$, $\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$
   iii. $2\sqrt{3}-5\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}-23\sqrt{3}$
   iv. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{7}$,
   v. $-5\sqrt{7}-4\sqrt{7}+2\sqrt{5}$

6) Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε το αποτέλεσμα.
   i. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}$, $\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}$, $\sqrt{7}\cdot 2\cdot\sqrt{5}$
   ii. $\sqrt{12}:\sqrt{4}$, $3\sqrt{4}:\sqrt{12}$,
   iii. $(\sqrt{75}\cdot\sqrt{12}):\sqrt{3}$

7) *(Παράδειγμα 1, σχολικό, σελ 21).* Να αποδείξετε ότι $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ και γενικά για μη αρνητικούς αριθμούς α, β ότι ισχύει $\sqrt{\alpha^2\beta}=\alpha\sqrt{\beta}$.

8) *(Παράδειγμα 2, σχολικό, σελ 21).* Να αποδειχθεί ότι:
   i. $3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5\sqrt{3}$,
   ii. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{24}=6\sqrt{2}$
   iii. $\sqrt{50}-\sqrt{18}=2\sqrt{2}$

9) Να βρείτε την συζυγή παράσταση των παρακάτω παραστάσεων:
   i. $(1-2)$, $(1+2)$, $(0-2)$, $(0+3)$, -2, $+3$
   ii. $(1-\sqrt{3})$, $(1+\sqrt{5})$, $(2-3\sqrt{3})$, $(0-\sqrt{3})$, $(0+3\sqrt{5})$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

10) Να γίνουν οι πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.
   i. $(1-5)(6-3)$, $(2-3+4)(5-5+3)$
   ii. $2(4-6+3)-(3+4-2)(-2-3)$
   iii. $\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$, $\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$
   iv. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

11) Να γίνουν οι πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.
   i. $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$, $(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})$

ii. $(1-3\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})$

iii. $(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$

iv. $(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$

v. $(-\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})$

12) *(Παράδειγμα 2, σχολικό, σελ 21).* Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητο παρανομαστή, σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρανομαστή.

i. $\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\frac{3}{\sqrt{5}}$, $-\frac{4}{2\sqrt{7}}$

Μάθημα 2

1) *(Ερώτηση 1, σχολικό, σελ 22).* Να κάνετε τις πράξεις:

i. $3\sqrt{3}+\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$,

ii. $\sqrt{5}+4\sqrt{5}-5\sqrt{5}$, $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$

iii. $\sqrt{18}:\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$

2) *(Ερώτηση 2, σχολικό, σελ 22).* Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της πρώτης στήλης με αυτά της δεύτερης

Στήλη Α	Στήλη Β
(α) $\sqrt{25}$	(i) -5
(β) $\sqrt{-25}$	(ii) Δεν ορίζεται
(γ) $-\sqrt{25}$	(iii) 5
(δ) $\sqrt{(-5)}$	
(ε) $\sqrt{5^2}$	
(στ) $\sqrt{-5^2}$	

3) *(Ερώτηση 3, σχολικό, σελ 22).* Να υπολογίσετε τις $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{x+y}$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\sqrt{xy}$, $\sqrt{x}\sqrt{y}$, $\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

i. Για x =4 και y =1,

ii. Για x =9 και y =16,

iii. Για x =64 και y =36

iv. Να διατυπώσετε τα παραπάνω αποτελέσματα σε μορφή κανόνων

4) *(Ερώτηση 4, σχολικό, σελ 23).* Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) εάν είναι αληθείς και με (Λ) εάν είναι ψευδείς

i. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

ii. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$

iii. $\sqrt{(-3)^2}=3$

iv. $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

v. $\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{1}{2}-1$

vi. το διπλάσιο του $\sqrt{5}$ είναι το $\sqrt{10}$

vii. το μισό του $\sqrt{12}$ είναι το $\sqrt{3}$

5) Εάν η πλευρά ενός τετραγώνου είναι $5\sqrt{2}$ μέτρα, πόσο είναι το εμβαδόν του;

6) Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν $50m^2$

7) *(Ερώτηση 5, σχολικό, σελ 23).* Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν $50m^2$. Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι η πλευρά του είναι $5\sqrt{2}$ μέτρα;

8) *(Άσκηση 1, σχολικό, σελ 23).* Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $3\sqrt{5}-7\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

ii. $5\sqrt{7}-8\sqrt{3}-2\sqrt{7}+4\sqrt{3}$

iii. $\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{8}}-\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{\frac{12}{7}}$

iv. $\sqrt{\frac{14}{5}}\cdot\sqrt{\frac{10}{7}}+\sqrt{\frac{21}{2}}\cdot\sqrt{\frac{14}{3}}$

9) *(Άσκηση 2, σχολικό, σελ 23).* Να αποδείξετε τις ισότητες:

i. $3\sqrt{2}-\sqrt{50}+\sqrt{32}-6\sqrt{8}=-10\sqrt{2}$

ii. $\sqrt{27}-\sqrt{20}+\sqrt{12}-\sqrt{5}=5\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

iii. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{48}+\dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{5}}=\sqrt{6}$

iv. $\sqrt{3.6}\cdot\sqrt{4.9}-\sqrt{0.8}\cdot\sqrt{0.2}=3.8$

10) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\sqrt{\sqrt{16}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$

ii. $\sqrt{\sqrt{0.0001}}$, $\sqrt{\sqrt{0.0016}}$

Μάθημα 3

1) Να απλοποιήσετε τις ρίζες: $\sqrt{75}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{125}$

2) Στις παρακάτω παραστάσεις να βάλετε μέσα στην ρίζα τους αριθμούς που είναι απέξω και να κάνετε πράξεις.

i. $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$, $-2\sqrt{3}$

ii. $x\sqrt{y}$, $x\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $-xy\sqrt{\dfrac{1}{xy}}$

iii. $x^2\sqrt{\dfrac{y}{x^4}}$, $xy^2\sqrt{\dfrac{x^3}{y^3}}$

3) Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρανομαστή:

i. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$, $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

ii. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}$, $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2y^3}}$

4) Να κάνετε τις πράξεις (αν γίνονται) και να δώσετε τα αποτελέσματα απλοποιημένα.

i. $\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}$

ii. $\sqrt{2}:(1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2}):\sqrt{2}$

5) *(Άσκηση 3, σχολικό, σελ 23).* Να υπολογίστε τις παραστάσεις:

i. $\sqrt{12+\sqrt{16}}$

ii. $\sqrt{86+2\sqrt{52-\sqrt{9}}}$

iii. $\sqrt{6\sqrt{12\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

6) *(Άσκηση 4, σχολικό, σελ 23).* Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός ορθογωνίου που έχει πλευρές:

i. $5\sqrt{2}$ και $\sqrt{2}$

ii. $4\sqrt{2}$ και $2\sqrt{2}$

iii. $3\sqrt{2}$ και $3\sqrt{2}$

7) *(Άσκηση 5, σχολικό, σελ 24).* Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\sqrt{2}(\sqrt{18}+\sqrt{8})$

ii. $\sqrt{6}(\sqrt{27}-\sqrt{3})$

iii. $(\sqrt{75}+\sqrt{45}-\sqrt{300}):\sqrt{15}$

iv. $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})$

8) *(Άσκηση 6, σχολικό, σελ 24).* Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρανομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρανομαστές.

i. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$, $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$, $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

9) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\sqrt{4-\sqrt{7+\sqrt{4}}}+\sqrt{3\sqrt{9\sqrt{16}}}$

ii. $\sqrt{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{9}{2}\sqrt{\dfrac{1}{4}}}}$

10) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(1+\sqrt{3})^2$, $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

ii. $(1+\sqrt{3})^2$, $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

Μάθημα 4

1) Λαμβάνοντας υπόψιν τις διάφορες τιμές που παίρνει ο πραγματικός αριθμός x
   i. να εξετάσετε πότε ορίζεται η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{x}$
   ii. καθώς και το πρόσημο της.
2) Λαμβάνοντας υπόψιν τις διάφορες τιμές που παίρνει ο πραγματικός αριθμός x
   i. να εξετάσετε πότε ορίζεται η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{x^2}$
   ii. καθώς και το πρόσημο της.
3) Λαμβάνοντας υπόψιν τις διάφορες τιμές που παίρνει ο πραγματικός αριθμός x
   i. να εξετάσετε πότε ορίζεται η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{x^3}$
   ii. καθώς και το πρόσημο της.
4) Σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $\sqrt{5}$ και $3\sqrt{5}$ να υπολογίσετε την υποτείνουσα.
5) Σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα α και κάθετες πλευρές β και γ ισχύει ότι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$. Να υπολογίσετε:
   i. $\sqrt{\alpha^2-\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$
   ii. $\sqrt{\alpha^2+\alpha\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$
6) *(Άσκηση 10, σχολικό, σελ 24).* Στις κάθετες πλευρές ΑΒ=3 και ΑΓ=6 ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ, Ε, έτσι ώστε ΑΔ=2 και ΑΕ=1. Να αποδείξετε ότι ΒΓ=3ΔΕ
7) *(Άσκηση 11, σχολικό, σελ 24).* Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) είναι το ύψος ΑΔ=4 και η πλευρά ΒΓ=4.
   i. Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΓ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $4+4\sqrt{5}$
   ii. Στην προηγούμενη ερώτηση 4 μαθητές έδωσαν τις παρακάτω απαντήσεις: $4+\sqrt{20}$, $4+2\sqrt{20}$, $8\sqrt{5}$, $2(2+\sqrt{20})$ ποιες από αυτές είναι σωστές;
8) Λαμβάνοντας υπόψιν τις διάφορες τιμές που παίρνει ο πραγματικός αριθμός x
   i. να εξετάσετε πότε ορίζεται η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{-x}$
   ii. καθώς και το πρόσημο της.

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Να υπολογίστε τις τετραγωνικές ρίζες:
   i. $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{144}$.
   ii. $\sqrt{0.04}$, $\sqrt{0.0004}$, $\sqrt{0.0016}$
2) Να αποδειχθεί ότι:
   i. $3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5\sqrt{3}$,
   ii. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{24}=6\sqrt{2}$
   iii. $\sqrt{50}-\sqrt{18}=2\sqrt{2}$
3) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) εάν είναι αληθείς και με (Λ) εάν είναι ψευδείς

i. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

ii. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$

iii. $\sqrt{(-3)^2}=3$

iv. $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

v. $\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{1}{2}-1$

vi. το διπλάσιο του $\sqrt{5}$ είναι το $\sqrt{10}$

vii. το μισό του $\sqrt{12}$ είναι το $\sqrt{3}$

4) Να υπολογίστε τις παραστάσεις:

i. $\sqrt{12+\sqrt{16}}$

ii. $\sqrt{86+2\sqrt{52-\sqrt{9}}}$

iii. $\sqrt{6\sqrt{12\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

Κριτήριο 2

1) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\sqrt{2}(\sqrt{18}+\sqrt{8})$

ii. $\sqrt{6}(\sqrt{27}-\sqrt{3})$

iii. $(\sqrt{75}+\sqrt{45}-\sqrt{300}):\sqrt{15}$

iv. $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})$

2) Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρανομαστή:

i. $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

ii. $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{2}{1+\sqrt{x}}$, $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $\frac{xy}{\sqrt{x^2 y^3}}$

3) Λαμβάνοντας υπόψιν τις διάφορες τιμές που παίρνει ο πραγματικός αριθμός x

i. να εξετάσετε πότε ορίζεται η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{x^2}$

ii. καθώς και το πρόσημο της.

4) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) είναι το ύψος ΑΔ=4 και η πλευρά ΒΓ=4.

i. Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΓ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $4+4\sqrt{5}$

ii. Στην προηγούμενη ερώτηση 4 μαθητές έδωσαν τις παρακάτω απαντήσεις:
$4+\sqrt{20}$, $4+2\sqrt{20}$, $8\sqrt{5}$, $2(2+\sqrt{20})$
ποιες από αυτές είναι σωστές;

[1.2Α] Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα

Θεωρία

1) Μαθηματικές εκφράσεις όπου εκτός των τελεστών των πράξεων περιέχουν αριθμούς και μεταβλητές ονομάζονται **αλγεβρικές παραστάσεις**. Οι αλγεβρικές παραστάσεις διακρίνονται σε:

    1. **Αριθμητικές παραστάσεις** είναι οι αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες δεν υπάρχουν μεταβλητές. Δηλαδή αποτελείται μόνο από αριθμούς.
    2. **Κλασματικές** είναι οι αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες υπάρχουν και κλάσματα μεταξύ των μεταβλητών, δηλαδή πρέπει στον παρανομαστή να υπάρχει κάποια μεταβλητή.
    3. **Άρρητες** είναι οι αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες υπάρχουν τετραγωνικές ρίζες όπου στην υπόρριζη ποσότητα υπάρχει μεταβλητή
    4. **Ακέραια** είναι η αλγεβρική παράσταση που μεταξύ των μεταβλητών σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες είναι θετικοί ακέραιοι

2) Αν σε μία αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε της μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις τότε το αποτέλεσμα ονομάζεται **τιμή** της παράστασης.

3) Μία ακέραια αλγεβρική παράσταση όπου μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των δυνάμεων είναι θετικοί ακέραιοι λέγετε **μονώνυμο,**

    1. π.χ. $4x^3$, x^2 , $\frac{2}{3}\alpha\beta$, $\sqrt{2}x^3y^2\omega^2$ κτλ
    2. Ένα μονώνυμο αποτελείται μόνο από παράγοντες, π.χ. $\sqrt{2}x^3y^2\omega^2=\sqrt{2}\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot\omega\cdot\omega$
    3. Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και των θετικών δυνάμεων σημειώνονται μόνο μεταξύ των μεταβλητών. Μεταξύ των αριθμητικών παραγόντων που συνήθως τους γράφουμε μπροστά από τις μεταβλητές μπορεί να σημειώνεται οποιαδήποτε πράξη, π.χ. $(\sqrt{2+3^2}+1)\cdot(-5)\cdot x^3$
    4. Ο αριθμητικός παράγοντας ονομάζεται **συντελεστής**. Εάν υπάρχουν πολύ αριθμητικοί παράγοντες τότε το γινόμενό τους είναι ο συντελεστής, π.χ. στο παραπάνω μονώνυμο ο συντελεστής είναι το γινόμενο $(\sqrt{2+3^2}+1)\cdot(-5)$
    5. Το γινόμενο όλων των μεταβλητών (μαζί με τις δυνάμεις) ονομάζεται **κύριο μέρος**, π.χ. στο μονώνυμο $\frac{2}{3}x^2y^3$ το κύριο μέρος είναι το x^2y^3

6. Ο εκθέτης μιας μεταβλητής ονομάζεται **βαθμός του μονωνύμου ως προς την μεταβλητή αυτή**, π.χ. στο μονώνυμο $\frac{2}{3}x^2y^3$ ο βαθμός του μονωνύμου ώς προς την μεταβλητή x είναι 2 και ως προς την y είναι 3.
7. Το άθροισμα των εκθετών όλων των μεταβλητών ονομάζεται **βαθμός του μονωνύμου**, π.χ. στο παραπάνω μονώνυμο το βαθμός του μονωνύμου είναι $2+3=5$
8. Τα μονώνυμα που έχουν ίδια κύρια μέρη ονομάζονται **όμοια**.
9. Τα μονώνυμα που έχουν ίδιους συντελεστές και ίδια κύρια μέρη ονομάζονται **ίσα**.
10. Τα μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές αλλά ίδια κύρια μέρη ονομάζονται **αντίθετα**.
11. Τα **σταθερά** μονώνυμα είναι αυτά που ο βαθμός του μονωνύμου είναι ίσος με μηδέν. Οι αριθμοί είναι τα σταθερά μονώνυμα.
12. Ο αριθμός μηδέν 0 είναι το **μηδενικό** μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.

4) Το ορθογώνιο με μήκη πλευρών α και β έχει **εμβαδόν** $E_{ορθ.}=\alpha\cdot\beta$. Το τετράγωνο με πλευρά α έχει εμβαδόν $E_{τετρ.}=\alpha^2$. Το τρίγωνο με μία πλευρά α και ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή την πλευρά β έχει εμβαδόν $E_{τριγ.}=\frac{1}{2}\alpha\cdot\beta$. Ο κύκλος με ακτίνα α έχει εμβαδόν $E_{κυκλ.}=\pi\cdot\alpha^2$.
5) Για να υπολογίσουμε την **περίμετρο** ενός σχήματος προσθέτουμε τα μήκη των πλευρών του. Στην περίπτωση του κύκλου με ακτίνα α παίρνουμε τον τύπο: $\Pi_{κυκλ.}=2\pi\alpha$
6) Για να υπολογίσουμε τον **όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου** διαστάσεων α, β, γ αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος, δηλαδή $V_{παραλ.}=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$
7) Για να υπολογίσουμε το **εμβαδόν σφαίρας** ακτίνας α παίρνουμε τον τύπο $E_{σφαίρας}=4\pi\alpha^2$, ενώ ο **όγκος** της είναι $V_{σφαίρας}=\frac{4}{3}\pi\alpha^3$.
8) Για να υπολογίσουμε τον **όγκο κυλίνδρου** ακτίνας α και ύψους υ παίρνουμε τον τύπο: $V_{κυλίνδρου}=\pi\alpha^2\upsilon$.
9) **Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου** ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των δύο δίσκων των βάσεων και του εμβαδού της ορθογώνιας πλευρικής επιφάνειας. Δηλαδή για κύλινδρο με ακτίνα α και ύψος y είναι $E_{κυλίνδρου}=2\cdot(\pi\alpha^2)+(2\pi\alpha)\cdot y$

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) *(Ερώτηση 1, σχολικό, σελ 27).* Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα;

i. $-3x^2y$, $3+x^2y$, $\frac{x^3y}{\omega^3}$, $2x^2y\omega^3$,

ii. $(3-\sqrt{2})\alpha\beta^3$, $\frac{2}{3}\alpha\beta\gamma^3$

2) Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα;

i. $2x^3$, $2\cdot6\cdot x^3$, $2+6\cdot x^3$

ii. $2x^3y^4$, $(2+3)x^3y^4$, $2x^3+3y^4$

iii. $\frac{2}{3}x^2y^2$, $\frac{2x^2y^2}{3}$, $\frac{2x^2}{3y^2}$, $\frac{2}{3x^2y^2}$

iv. 0, 1, -1, 2, 3.56 , $3\cdot10^{-2}$

v. $\sqrt{2}x^3$, $(\sqrt{2}-3)x^2$

vi. $2\sqrt{x^3}y^3$, $4\frac{x^3}{\sqrt{y}}$

3) Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα: x^{-1} , $2x^{-3}$, $2^{-2}x^5$, $2x^2y^{-2}$

4) *(Ερώτηση 2, σχολικό, σελ 27).* Ποια από τα παρακάτω μονώνυμα είναι όμοια: $6x^2y^2$, $-\frac{3}{5}xy^3$, $-x^3yz$, $-5y^3x$, $\frac{zyx^3}{4}$, $\frac{5}{2}y^2x^2$, $\frac{xy^3}{7}$, $-x^2y^2$, yx^3z , $\sqrt{2}xy^3$.

5) Σε κάθε ένα από τα μονώνυμα που ακολουθούν να γράψετε το αντίθετό του: $6x^2y^2$, $-\frac{3}{5}xy^3$, $-x^3yz$, $-5y^3x$, $\frac{zyx^3}{4}$, $\frac{5}{2}y^2x^2$, $\frac{xy^3}{7}$, $-x^2y^2$, yx^3z , $\sqrt{2}xy^3$.

6) Σε κάθε ένα από τα μονώνυμα που ακολουθούν να γράψετε ένα όμοιο: $6x^2y^2$, $-\frac{3}{5}xy^3$, $-x^3yz$, $-5y^3x$, $\frac{zyx^3}{4}$, $\frac{5}{2}y^2x^2$, $\frac{xy^3}{7}$, $-x^2y^2$, yx^3z , $\sqrt{2}xy^3$.

7) Στα μονώνυμα που ακολουθούν να βρείτε τον βαθμό ως προς x, ως προς y, ως προς z και τον συνολικό βαθμό του μονωνύμου: $6x^2y^2$, $-\frac{3}{5}xy^3$, $-x^3yz$, $-5y^3x$, $\frac{zyx^3}{4}$, $\frac{5}{2}y^2x^2$, $\frac{xy^3}{7}$, $-x^2y^2$, yx^3z , $\sqrt{2}xy^3$.

8) Ποιες από τις παρακάτω είναι αριθμητικές παραστάσεις: 0 , 23 , $x+y$, $2x$, $2(3-5)^2$, $\sqrt{2}-3$, $\frac{1}{2\sqrt{5}}$, $3x^3+3^4$

9) Ποιες από τις παρακάτω είναι κλασματικές παραστάσεις: $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{2x}{3}$, $\frac{2}{x}+\frac{2}{5}$, $\frac{2x}{5}+3\frac{y^2}{6}$, $(\frac{2}{5}+1)x^4$.

10) Ποιες από τις παρακάτω είναι άρρητες παραστάσεις: $\sqrt{2}x^2$, $\sqrt{2x}$, $2\sqrt{x}$, $(\sqrt{2}+2)x^3y^4$, $(\sqrt{2}+3)x^3$, $\sqrt{y^5}$.

11) Ποιες από τις παρακάτω είναι ακέραιες παραστάσεις: x^2+y^2 , $2x^3+2x^6y^5$, $\sqrt{5}x^3$, $2\frac{\sqrt{x}}{y+z}$

Μάθημα 2

1) *(Παράδειγμα 1, σχολικό, σελ 26).* Να βρεθεί η αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

i. $-3x^2y^3$, για $x=-2$ και $y=-1$

ii. $2\alpha^2-3\beta+6$, για $\alpha=-3$ και $\beta=8$

2) *(Παράδειγμα 2, σχολικό, σελ 27).* Το ιδανικό βάρος Β (σε κιλά) ενός ενήλικα, ύψους u (σε cm) δίνεται από τον τύπο

$B=\kappa(\upsilon-100+\frac{t}{10})$

όπου t είναι η ηλικία του (σε έτη) και κ μια σταθερά (για τον άνδρα κ=0.9 και για την γυναίκα κ=0.8). Να βρεθεί ποιο είναι το ιδανικό βάρος για έναν άνδρα και μία γυναίκα, από τους οποίους ο καθένας είναι 30 ετών και έχει ύψος 1.77m.

3) *(Ερώτηση 3, σχολικό, σελ 28).* Στα παρακάτω μονώνυμα να βρείτε τον συντελεστή, το κύριο μέρος, το βαθμό ως προς x, ως προς y και τον βαθμό ως προς x και y: $5xy^4$, $-xy^2$, $\frac{1}{7}x^2y^5$, $-\sqrt{3}x^4$

4) Δίνεται τετράγωνο πλευράς x και κύκλος με ακτίνα y. Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το συνολικό εμβαδόν των δύο σχημάτων. Μετά να βρείτε αυτό το εμβαδόν όταν $x=2\,cm$ και $y=4\,cm$.

5) Με την βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $x^3y^2(3x^2y^{-1})4x^2$

ii. $(-x^3y^4)x^2y^{-2}$

iii. $4ax^2(-5a^2x^3y^{-2})a^{-1}x^{-3}y^2$

6) Με την βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $4x^2:2x$

ii. $3x^2y^3(-2x^{-3}):2x^3$

iii. $-4x^2a^3y^5(-3x^3a^4):(-2a^3y^2)$

7) Δίνονται τα μονώνυμα: $P(x)=2x^3$ και $Q(x)=-3x^{-2}$. Αφού υπολογίστε τις παρακάτω εκφράσεις να βρείτε σε ποιες περιπτώσεις τα αποτελέσματα είναι μονώνυμα.

i. $P(x)\cdot Q(x)$

ii. $P(x):Q(x)$

iii. $[P(x)]^2\cdot Q(x)$

iv. $P(x)+Q(x)$

8) *(Ερώτηση 5, σχολικό, σελ 28).* Στις παρακάτω ερωτήσεις να απαντήσετε με μία λέξη (σταυρόλεξο):

i. Έκφραση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές συνδεόμενες με τα σύμβολα των πράξεων (δύο λέξεις).

ii. Είναι τα μονώνυμα 8, -5, 3.

iii. Είναι το μονώνυμο 0.

iv. Είναι ο βαθμός του μονωνύμου $3x^2\omega$ ως προς y.

v. Στο μονώνυμο $-2x^2y$ είναι το -2.

vi. Είναι τα μονώνυμα $-\frac{6}{2}x^3y$ και $-3x^3y$.

vii. Ο συντελεστής του μονωνύμου xy .

viii. Είναι το $xy\omega^2$ στο μονώνυμο $4xy\omega^2$ (δύο λέξεις).

ix. Αλγεβρική παράσταση που περιέχει μόνο αριθμούς.

9) Στην ερώτηση που ακολουθεί να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Σε ένα μηδενικό μονώνυμο ο βαθμός του είναι:

i. 0,

ii. 1,

iii. απροσδιόριστος,

iv. τίποτα από τα παραπάνω.

10) Οι εκθέτες των μεταβλητών που περιέχει ένα μονώνυμο μπορεί να ανήκουν:

i. στο σύνολο $\mathbb{N}$

ii. στο σύνολο $\mathbb{N}^*$

iii. στο σύνολο $\mathbb{Z}$

iv. στο σύνολο $\mathbb{R}$

v. στο σύνολο $\mathbb{C}$

Μάθημα 3

1) *(Ερώτηση 4, σχολικό, σελ 28).* Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή $-\frac{1}{3}$ και κύριο μέρος $x y^2 \omega^3$. Να βρείτε το ίσο του και το αντίθετό του.

2) *(Άσκηση 1, σχολικό, σελ 29).* Να βρείτε την αριθμητική τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων:

i. $-2xy^3+x^2 y-4$, για $x=-2$ και $y=1$.

ii. $\frac{2}{3}x\omega^2+\frac{1}{2}\omega^3$, για $x=3$ και $\omega=-2$

3) *(Άσκηση 2, σχολικό, σελ 29).* Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή $-\frac{5}{7}$ και μεταβλητές α και β. Να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός του ως προς α είναι 2 και ως προς α και β είναι 5.

4) Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή -3 και μεταβλητές α και β. Να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός του ως προς α είναι 2 και ως προς β είναι 5

5) *(Άσκηση 3, σχολικό, σελ 29).* Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού ν, ώστε το μονώνυμο $3x^\nu y^2$

i. να είναι μηδενικού βαθμού ως προς x

ii. να είναι πέμπτου βαθμού ως προς x και y

iii. να έχει αριθμητική τιμή 48, για $x=2$ και $y=-1$.

6) Να βρεθεί η τιμή του κ ώστε τα μονώνυμα $(\kappa-1)x^2 y$ και $3x^2 y$ να είναι ίσα.

7) Να βρεθεί η τιμή του κ ώστε τα μονώνυμα $3x^\kappa y$ και $3x^2 y$ να είναι ίσα.

8) Να βρεθούν οι τιμές των κ και λ ώστε τα μονώνυμα $(\kappa-1)x^2 y$ και $3x^\lambda y$ να είναι αντίθετα.

9) Να βρεθούν οι τιμές των κ και λ ώστε τα μονώνυμα $(\kappa-\lambda)x^2 y$ και $3x^\lambda y$ να είναι αντίθετα.

10) Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α ο βαθμός του μονωνύμου $(\alpha-2)x^2 y$

Μάθημα 4

1) Να κάνετε τις πράξεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας:

i. $4x^2-5x^2$

ii. $2x^2+3x^2$

iii. $4x^2 y+3x^2 y$

2) Δίνονται τα μονώνυμα: $P(x)=2x^3$ και $Q(x)=-3x^3$. Αφού υπολογίστε τις παρακάτω εκφράσεις να βρείτε σε ποιες περιπτώσεις τα αποτελέσματα είναι μονώνυμα.

i. $P(x)\cdot Q(x)$

ii. $P(x):Q(x)$

iii. $[P(x)]^2\cdot Q(x)$

iv. $P(x)+Q(x)$

3) Δίνονται τα μονώνυμα $P(x)=\alpha x^{\mu}$ και $Q(x)=\beta x^{\mu}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\mu,\nu\in\mathbb{N}$. Να γράψετε την συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε η έκφραση $P(x)+Q(x)$ να είναι μονώνυμο.

4) *(Άσκηση 4, σχολικό, σελ 29).* Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ, ν ώστε τα μονώνυμα $4x^3y^{\nu}$ και $\lambda x^{\kappa}y^2$ να είναι:

i. όμοια

ii. ίσα

iii. αντίθετα.

5) *(Άσκηση 5, σχολικό, σελ 29).* Να γράψετε τα μονώνυμα που εκφράζουν το εμβαδόν και τον όγκο μίας σφαίρας που έχει ακτίνα ρ. Να προσδιορίσετε τον συντελεστή, το κύριο μέρος και το βαθμό κάθε μονωνύμου. Ποια είναι η αριθμητική τιμή κάθε μονωνύμου, όταν $\rho=10$.

6) *(Άσκηση 7, σχολικό, σελ 29).* Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές x και 5 αντίστοιχα. Να υπολογίστε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με την υποτείνουσα του τριγώνου.

7) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x καθώς και ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου ώστε η διάμετρος του να ταυτίζεται με την πλευρά του τριγώνου. Να γράψετε μονώνυμο που να εκφράζει την περίμετρο του σύνθετου σχήματος.

8) Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ, ν ώστε τα μονώνυμα $(\kappa+4)x^3y^{\nu-2}$ και $\lambda x^{\kappa}y^2$ να είναι:

i. όμοια

ii. ίσα

iii. αντίθετα.

9) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $x^a x^{a-2}$

ii. $x^a : x^{a-2}$

iii. $x^a y^b(-2x^{-3}y^{2b})$

10) *(Άσκηση 1, σχολικό Α Λυκείου, σελ 52).* Δίνεται η παράσταση:

$$A=[(x^2y^3)^{-2}\cdot(xy^3)^4]:\left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}.$$

i. Να δείξετε ότι $A=x^9\cdot y^9$

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x=2010$ και $y=\frac{1}{2010}$

11) *(Άσκηση 1, σχολικό Α Λυκείου, σελ 52).* Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=[(xy^{-1})^2:(x^3y^7)^{-1}]^2$ για $x=0.4$ και $y=2.5$

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα;

i. $-3x^2y$, $3+x^2y$, $\frac{x^3y}{\omega^3}$, $2x^2y\omega^3$,

ii. $(3-\sqrt{2})\alpha\beta^3$, $\frac{2}{3}\alpha\beta\gamma^3$

2) Στα μονώνυμα που ακολουθούν να βρείτε τον βαθμό ως προς x, ως προς y, ως προς z και τον συνολικό βαθμό του μονωνύμου: $6x^2y^2$, $-\frac{3}{5}xy^3$, $-x^3yz$,

$-5y^3x$, $\frac{zyx^3}{4}$, $\frac{5}{2}y^2x^2$, $\frac{xy^3}{7}$,
$-x^2y^2$, yx^3z , $\sqrt{2}xy^3$.

3) Δίνονται τα μονώνυμα: $P(x)=2x^3$ και $Q(x)=-3x^{-2}$. Αφού υπολογίστε τις παρακάτω εκφράσεις να βρείτε σε ποιες περιπτώσεις τα αποτελέσματα είναι μονώνυμα.
   i. $P(x)\cdot Q(x)$
   ii. $P(x):Q(x)$
   iii. $[P(x)]^2\cdot Q(x)$
   iv. $P(x)+Q(x)$

4) Στην ερώτηση που ακολουθεί να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Σε ένα μηδενικό μονώνυμο ο βαθμός του είναι:
   i. 0,
   ii. 1,
   iii. απροσδιόριστος,
   iv. τίποτα από τα παραπάνω.

Κριτήριο 2

1) Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή $-\frac{1}{3}$ και κύριο μέρος $xy^2\omega^3$. Να βρείτε το ίσο του και το αντίθετό του.

2) Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή $-\frac{5}{7}$ και μεταβλητές α και β. Να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός του ως προς α είναι 2 και ως προς α και β είναι 5.

3) Να γράψετε τα μονώνυμα που εκφράζουν το εμβαδόν και τον όγκο μίας σφαίρας που έχει ακτίνα ρ. Να προσδιορίσετε τον συντελεστή, το κύριο μέρος και το βαθμό κάθε μονωνύμου. Ποια είναι η αριθμητική τιμή κάθε μονωνύμου, όταν $\rho=10$.

4) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=[(xy^{-1})^2:(x^3y^7)^{-1}]^2$ για $x=0.4$ και $y=2.5$

[1.2Β] Πράξεις με μονώνυμα

Θεωρία

1) Για να **προσθέσουμε** δύο ή περισσότερα μονώνυμα πρέπει αυτά να είναι όμοια. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα και το αποτέλεσμα είναι και αυτό μονώνυμο, π.χ. $2x^2y+3x^2y-6x^2y=(2+3-6)x^2y=-1x^2y$.
    1. Η πρόσθεση όμοιων μονωνύμων ονομάζεται και **αναγωγή ομοίων όρων**.
    2. Σε περίπτωση όπου τα μονώνυμα δεν είναι όμοια τότε δεν γίνεται η πρόσθεση και το αποτέλεσμα δεν είναι μονώνυμο.
    3. Αν τα μονώνυμα είναι αντίθετα τότε έχουν αποτέλεσμα το μηδενικό μονώνυμο (0). Αυτή την διαδικασία την ονομάζουμε **απαλοιφή αντίθετων όρων**.
2) Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο ή περισσότερα μονώνυμα μπορεί αυτά να είναι όμοια ή όχι. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και των δυνάμεων και το αποτέλεσμα είναι πάντα μονώνυμο, π.χ. $(2x^2y^3)\cdot(-3x^3yz)=-6x^5y^4z$. Δηλαδή για να υπολογίσουμε τον συντελεστή πολλαπλασιάζουμε όλους τους συντελεστές και για να υπολογίσουμε το κύριο μέρος προσθέτουμε τους εκθέτες των ίδιων μεταβλητών.
3) Για να **διαιρέσουμε** δύο ή περισσότερα μονώνυμα μπορεί αυτά να είναι όμοια ή όχι. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και των δυνάμεων και το αποτέλεσμα μπορεί να μην είναι μονώνυμο, π.χ. $(2x^2y^3):(-3x^3yz)=-\frac{2}{3}x^{-1}y^2z^{-1}$.

    Δηλαδή για να υπολογίσουμε τον συντελεστή διαιρούμε τους δύο συντελεστές και για να υπολογίσουμε το κύριο μέρος αφαιρούμε τους εκθέτες των ίδιων μεταβλητών.
4) Ένα όχημα που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή ταχύτητα u προς μία κατεύθυνση λέμε ότι εκτελεί **Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση**.
    1. Το διάστημα ή η απόσταση ή το μέτρο της μετατόπισης που διανύει το όχημα σε χρόνο Δt δίνεται από τον τύπο: $|\Delta x|=s=u\cdot\Delta t$
5) Ένα όχημα που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση/επιβράδυνση a προς μία κατεύθυνση λέμε ότι εκτελεί **Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη κίνηση**.
    1. Το διάστημα ή η απόσταση ή το μέτρο της μετατόπισης που διανύει το όχημα σε χρόνο Δt δίνεται από τον τύπο: $|\Delta x|=s=u_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}a\cdot\Delta t^2$ όπου u_0 είναι η αρχική ταχύτητα.
    2. Η ταχύτητα που έχει το σώμα μετά από χρόνο Δt είναι $u=u_0+a\cdot\Delta t$.
6) Εάν αφήσουμε ένα σώμα από κάποιο ύψος, χωρίς αρχική ταχύτητα, τότε αυτό θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα κάτω προς την επιφάνεια της γης λόγω του *βάρους*, της *δύναμης*

δηλαδή που ασκεί η Γη πάνω στο σώμα. Την κίνηση αυτή την ονομάζουμε **ελεύθερη πτώση**. Η ελεύθερη πτώση είναι:

1. ομαλά επιταχυνόμενη, με σταθερή δηλαδή επιτάχυνση ίση με $g=10\,m/s^2$,
2. ευθύγραμμη κίνηση,
3. γίνεται προς μία κατεύθυνση, δηλαδή κατακόρυφα από πάνω προς τα κάτω.
4. δεν έχει αρχική ταχύτητα $u_0=0$,
5. το μέτρο της μετατόπισης ή το διάστημα ή η απόσταση που διανύει το σώμα από την στιγμή της εκκίνησης δίνεται από τον τύπο: $|\Delta x|=s=\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$, όπου Δt είναι το χρονικό διάστημα που πέρασε από την στιγμή της εκκίνησης.
6. Το μέτρο της ταχύτητας που θα έχει αποκτήσει το σώμα μετά από χρόνο Δt δίνεται από τον τύπο: $\upsilon=g\cdot\Delta t$.
7. Η ελεύθερη πτώση είναι υποκατηγορία της ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης για $u_0=0$ και $\alpha=g$

7) **Διάλυμα** είναι ένα *ομογενές μίγμα* δύο ή περισσότερων ουσιών, οι οποίες αποτελούν τα συστατικά του διαλύματος. Από τα συστατικά αυτά, εκείνο που έχει την ίδια φυσική κατάσταση με αυτή του διαλύματος και βρίσκεται συνήθων σε περίσσεια, ονομάζεται **διαλύτης**. Τα υπόλοιπα συστατικά ονομάζονται **διαλυμένες ουσίες**.

8) Η **περιεκτικότητα** ενός διαλύματος εκφράζεται συνήθως με τους εξής τρόπους:

1. Περιεκτικότητα στα εκατό **κατά βάρος (% w/w)**, που εκφράζει την μάζα της διαλυμένης ουσίας (σε g) σε 100g διαλύματος.
2. Περιεκτικότητα στα εκατό **βάρος κατ’ όγκο (% w/v)**, που εκφράζει την μάζα της διαλυμένης ουσίας (σε g) σε 100ml διαλύματος.
3. Περιεκτικότητα στα εκατό **όγκου σε όγκο (% v/v)**, που εκφράζει τον όγκο της διαλυμένης ουσίας (σε ml) σε 100ml διαλύματος.

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) Να γίνουν οι πράξεις, αφού πρώτα απαλείψετε (αν γίνεται) τους αντίθετους όρους. Να εφαρμόσετε την επιμεριστική ιδιότητα.

i. $2x^2+3x^2$, $-3x^2+4x^2$, $6y^2-4y^2$

ii. $2y^3-3y^3+3y^3$, $-4x^2-3x^2+2x^2$

iii. $3\alpha\beta-4\alpha\beta+5\alpha\beta-3\alpha\beta$

iv. $3\alpha\beta^2-4\alpha\beta^2+4\alpha\beta^2-3\alpha\beta^2$

v. $\frac{1}{2}xy-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}xy$

2) Να γίνουν οι πράξεις. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και των δυνάμεων.

i. $2x^2 \cdot 3x^2$, $4x^3 \cdot (-5x^3)$, $xy \cdot (-xy)$

ii. $2x^2 y^3 \cdot (-3x^2 y^4)$, $-x\,y \cdot (-2x^3 y\,z)$

iii. $-3x^3 y\,z^4 \cdot (-x^2 y\,w)$

iv. $-\alpha\,\beta^2 \cdot (+\alpha^2 \beta)$

3) Να γίνουν οι πράξεις:

i. $4\alpha^3 : (4\alpha^2)$, $3x^3 : (2x^2)$, $xy^2 : (3xy^2)$

ii. $\frac{4\alpha^3}{4\alpha^2}$, $\frac{3x^3}{2x^2}$, $\frac{xy^2}{3xy^2}$

iii. $16x^2 y\,a^2 : (-2xy)$

iv. $7\alpha\,\beta^2 \gamma^3 : (-7\alpha\,\beta\,\gamma)$

4) Αφού κάνετε τις παρακάτω πράξεις να διατυπώσετε έναν κανόνα που να καθορίζει πότε το άθροισμα ή η διαφορά δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

i. $2xy^2 - 3xy^2 + 7xy^2$

ii. $2x^3 y - 3x^3 y + 5x^2 y$

iii. $-2x\,y^3 - 2xy^3 - 4x^3 y + 4xy^3$

iv. $3xy^2 z - 5xy^2 z + 3x^2 yz$

5) Αφού κάνετε τις παρακάτω πράξεις να διατυπώσετε έναν κανόνα που να καθορίζει πότε το γινόμενο δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

i. $2xy^2 \cdot (-3xy^2) \cdot (7xy^2)$

ii. $2x^3 y \cdot (-3x^3 y) \cdot (5x^2 y)$

iii. $-2x\,y^3 \cdot (-2xy^3) \cdot (-4x^3 y) \cdot (4xy^3)$

iv. $3xy^2 z \cdot (-5xy^2 z) \cdot (3x^2 yz)$

6) Αφού κάνετε τις παρακάτω πράξεις να διατυπώσετε έναν κανόνα που να καθορίζει πότε ο λόγος δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

i. $2xy^2 : (-3xy^2)$

ii. $2x^3 y : (-3x^2 y)$

iii. $-2x\,y^3 : (-2xy^4)$

iv. $3xy^2 : (-5xy^2 z)$

7) *(Παράδειγμα 1, σχολικό, σελ 31)*. Να γίνουν οι πράξεις:

i. $-7\alpha\,x^2 - \frac{1}{2}\alpha\,x^2 + 4\alpha\,x^2$

ii. $(-\frac{2}{3}x\,y^2) \cdot (-\frac{1}{4}x^3 y^2)$

iii. $(\frac{3}{4}\alpha^3 \beta) : (-\frac{1}{2}\alpha\beta^3)$

8) *(Ερώτηση 1, σχολικό, σελ 32)*. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ, αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες.

i. Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο.

ii. Η διαφορά δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

iii. Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

iv. Το πηλίκο δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

9) *(Ερώτηση 2, σχολικό, σελ 32)*. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $-5x^2 + 2x^2$, $-5x^2 \cdot 2x^3$,

ii. $3x - 2y + 2x$, $4x^2 y - yx^2$, $2xy \cdot y^2$

iii. $6x^3 y : 3xy$, $10x^6 y^6 : (5x^4 y^3)$

iv. $[(-12x^3 y) \cdot y] : 4x^2$

v. $-4x^2 y - 3x^2 y$

10) *(Άσκηση 1, σχολικό, σελ 32)*. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $-7x^2 y + 4x^2 y$, $4\alpha\,x^2 - 6\alpha\,x^2 + \alpha\,x^2$

ii. $6x^3-\frac{9}{2}x^3$,

iii. $0.25\alpha\beta=0.35\alpha\beta+0.5\alpha\beta$

iv. $\frac{2}{5}x y^2\omega^4-1.2x y^2\omega^4$

v. $-3\sqrt{2}x^2+4\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}x^2$

Μάθημα 2

1) *(Παράδειγμα 3, σχολικό, σελ 27).* Δίνεται κύκλος ακτίνας ρ. Σχεδιάζουμε τετράγωνο εξωτερικά του κύκλου που να εφάπτεται σε αυτόν. Να βρεθεί μονώνυμο που να υπολογίζει το επιπλέον εμβαδόν που προστέθηκε στο σχήμα μετά τον σχεδιασμό του τετραγώνου. Να προσδιορίζετε τον συντελεστή του, το κύριο μέρος και τον βαθμό του. Να υπολογιστεί η αριθμητική του τιμή με προσέγγιση για $\rho=10$.

2) Από τον τρίτο όροφο πολυκατοικίας αφήνουμε χωρίς αρχική ταχύτητα να πέσει σώμα μικρών διαστάσεων. Να γράψετε μονώνυμο που να υπολογίζει:

   i. την απόσταση που έχει διανύσει το σώμα μετά από χρόνο t από την στιγμή της εκκίνησης.

   ii. την ταχύτητα του σώματος μετά από χρόνο t από την στιγμή της εκκίνησης.

   iii. Να υπολογίσετε την αριθμητική αυτών των μονωνύμων για για χρονικό διάστημα $t=10\,s$. Δίνεται $g=10\,m/s^2$

3) *(Παράδειγμα 2, σχολικό, σελ 31).* Από τον τρίτο όροφο πολυκατοικίας αφήνουμε ένα σώμα χωρίς αρχική ταχύτητα να πέσει στο έδαφος. Αν ο χρόνος t που μεσολαβεί μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι διπλάσιος του χρόνου που θα έκανε, αν το αφήναμε να πέσει από τον πρώτο όροφο, να βρεθεί το μονώνυμο που εκφράζει την διαφορά ύψους του τρίτου από τον πρώτο όροφο.

4) Δίνεται κύλινδρος ακτίνας ρ και ύψους y. Να βρεθεί μονώνυμο που να εκφράζει τον όγκο του. Ποια είναι η αριθμητική του τιμή για $\rho=10$ και $y=2$.

5) *(Παράδειγμα 3, σχολικό, σελ 31).* Μια τσιμεντένια κυλινδρική κολώνα, που έχει ακτίνα βάσης ρ και ύψους y, ενισχύεται περιμετρικά με τσιμέντο και αποκτά ακτίνα βάσης διπλάσια της αρχικής. Ο μηχανικός ισχυρίζεται ότι το τσιμέντο που προστέθηκε έχει όγκο τριπλάσιο του αρχικού όγκου της κολώνας. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

6) Μα δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις βάσης 6 και 2 μέτρα. Να βρεθεί μονώνυμο που να εκφράζει τον όγκος της σε συνάρτηση με το ύψος της h. Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή του όγκου για h=1 μέτρο.

7) Ένας αγρότης έχει ένα οικόπεδο με σχήμα τετράγωνο πλευράς 2x και θέλει να περιφράξει ένα τετράγωνο κομμάτι του οικοπέδου πλευράς x. Να γράψετε μονώνυμο που να υπολογίζει το εμβαδό του οικοπέδου που έμεινε χωρίς περίφραξη.

8) Να υπολογιστεί μονώνυμο που να υπολογίζει το καθαρό οινόπνευμα (σε ml) που περιέχεται μέσα σε διάλυμα (π.χ. ένα ποτήρι κρασί) όγκου x ml και περιεκτικότητας 11% v/v. Να υπολογιστεί η αριθμητική του τιμή για $x=50\,ml$

9) Αν το ψηφίο των δεκάδων σε έναν διψήφιο αριθμό είναι διπλάσιο από το ψηφίο των μονάδων να γραφεί μονώνυμο που να υπολογίζει το άθροισμα των ψηφίων αυτού του αριθμού.

10) Να υπολογιστεί μονώνυμο που να εκφράζει το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου ακτίνας x και ύψους x.

Μάθημα 3

1) *(Άσκηση 2, σχολικό, σελ 32).* Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

   i. $-3x\cdot 5x^2$, $6x^2\cdot\frac{3}{4}x^3$,

   ii. $2xy^3\cdot(-3x^2y)$,

   iii. $-3x^2y\cdot(-2xy^4\omega)$, $-\frac{1}{3}\alpha\beta^3\cdot 4\alpha\beta^3$

   iv. $\frac{4}{3}x^3\alpha^2\cdot(-\frac{1}{4}x\alpha^3)$,

   v. $(-\frac{2}{5}xy^3)\cdot(-3x^2\omega)\cdot(-\frac{5}{6}y\omega^3)$

2) *(Άσκηση 3, σχολικό, σελ 32).* Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

   i. $12\alpha^3:(-3\alpha)$, $8x^2y:(2xy^2)$,

   ii. $(-\frac{1}{3}\alpha^3\beta^5):(\frac{6}{5}\alpha^2\beta^2)$

   iii. $(-0.84x^2\omega^5):(-0.12x\omega^3)$,

   iv. $(-x^3\alpha^4\omega):(-\frac{1}{4}x^2\alpha)$

   v. $(0.5\alpha^3\beta^7):(-\frac{7}{10}\alpha^2\beta^2)$

3) *(Άσκηση 4, σχολικό, σελ 32).* Να κάνετε τις πράξεις:

   i. $(-\frac{1}{3}x^2y)^2\cdot(6xy^3)$

   ii. $(-2x^2y^3)^3:(-8x^3y^4)$

   iii. $(-2xy^4\omega^3)^2\cdot(-x^2y)^3$

4) Να κάνετε τις πράξεις:

   i. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}x^3ya)\cdot(\frac{-1}{\sqrt{3}}xy^2b^3)$

   ii. $[(-2a^2bx^3+5a^2bx^3-7a^2bx^3):(-2abx^2)](\frac{1}{3}ab^2x)^2$

5) Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A=3\alpha x^2y-x^2y$, όπου α ένας αριθμός.

   i. Να γράψετε την παράσταση Α σε μορφή μονωνύμου χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.

   ii. Τι τιμή πρέπει να έχει ο αριθμός α ώστε το μονώνυμο να είναι το μηδενικό.

   iii. Ποιος είναι ο συντελεστής του μονωνύμου;

   iv. Ποιος είναι ο βαθμός ως προς x και ποιος ως προς y;

6) Να κάνετε τις πράξεις:

   i. $\dfrac{2xy^2+\dfrac{4x^2y^4}{2xy^2}}{4x^3y^5z}$

   ii. $\dfrac{-2a^2bx^3+5a^2bx^3}{-2abx^2}(\frac{1}{3}ab^2x)^2$

7) Να απαντήσετε μονολεκτικά (Σταυρόλεξο) στις παρακάτω ερωτήσεις:

   i. Το μονώνυμο αυτό δεν έχει βαθμό.

   ii. Στο μονώνυμο $7x^4y\omega$ ως προς x είναι το 4.

   iii. Παράσταση όπου μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

iv. Είναι τα μονώνυμα $5xy^2$, $-\sqrt{25}xy^2$

v. Η πράξη αυτή δεν σημειώνεται μεταξύ των μεταβλητών ενός μονωνύμου.

8) Να γράψετε τρία όμοια μονώνυμα με δύο μεταβλητές και να βρείτε το άθροισμά τους.

9) Να γράψετε τρία μονώνυμα με δύο μεταβλητές που δεν είναι όμοια. Μπορείτε τώρα να βρείτε ένα μονώνυμο ίσο με το άθροισμά τους;

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Να γίνουν οι πράξεις, αφού πρώτα απαλείψετε (αν γίνεται) τους αντίθετους όρους. Να εφαρμόσετε την επιμεριστική ιδιότητα.

   i. $2x^2+3x^2$, $-3x^2+4x^2$, $6y^2-4y^2$

   ii. $2y^3-3y^3+3y^3$, $-4x^2-3x^2+2x^2$

   iii. $3\alpha\beta-4\alpha\beta+5\alpha\beta-3\alpha\beta$

   iv. $3\alpha\beta^2-4\alpha\beta^2+4\alpha\beta^2-3\alpha\beta^2$

   v. $\frac{1}{2}xy-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}xy$

2) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ, αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες.

   i. Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο.

   ii. Η διαφορά δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

   iii. Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

   iv. Το πηλίκο δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

3) Από τον τρίτο όροφο πολυκατοικίας αφήνουμε χωρίς αρχική ταχύτητα να πέσει σώμα μικρών διαστάσεων. Να γράψετε μονώνυμο που να υπολογίζει:

   i. την απόσταση που έχει διανύσει το σώμα μετά από χρόνο t από την στιγμή της εκκίνησης.

   ii. την ταχύτητα του σώματος μετά από χρόνο t από την στιγμή της εκκίνησης.

   iii. Να υπολογίσετε την αριθμητική αυτών των μονωνύμων για για χρονικό διάστημα $t=10\,s$. Δίνεται $g=10\,m/s^2$

4) Να υπολογιστεί μονώνυμο που να υπολογίζει το καθαρό οινόπνευμα (σε ml) που περιέχεται μέσα σε διάλυμα (π.χ. ένα ποτήρι κρασί) όγκου x ml και περιεκτικότητας 11% v/v. Να υπολογιστεί η αριθμητική του τιμή για $x=50\,ml$

Κριτήριο 2

1) Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A=3\alpha x^2 y-x^2 y$, όπου α ένας αριθμός.

   i. Να γράψετε την παράσταση Α σε μορφή μονωνύμου χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.

   ii. Τι τιμή πρέπει να έχει ο αριθμός α ώστε το μονώνυμο να είναι το μηδενικό.

iii. Ποιος είναι ο συντελεστής του μονωνύμου;

iv. Ποιος είναι ο βαθμός ως προς x και ποιος ως προς y;

2) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\dfrac{2xy^2+\dfrac{4x^2y^4}{2xy^2}}{4x^3y^5z}$

ii. $\dfrac{-2a^2bx^3+5a^2bx^3}{-2abx^2}\left(\dfrac{1}{3}ab^2x\right)^2$

3) Να απαντήσετε μονολεκτικά (Σταυρόλεξο) στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Το μονώνυμο αυτό δεν έχει βαθμό.

ii. Στο μονώνυμο $7x^4y\omega$ ως προς x είναι το 4.

iii. Παράσταση όπου μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

iv. Είναι τα μονώνυμα $5xy^2$, $-\sqrt{25}xy^2$

v. Η πράξη αυτή δεν σημειώνεται μεταξύ των μεταβλητών ενός μονωνύμου.

4) Αν το ψηφίο των δεκάδων σε έναν διψήφιο αριθμό είναι διπλάσιο από το ψηφίο των μονάδων να γραφεί μονώνυμο που να υπολογίζει το άθροισμα των ψηφίων αυτού του αριθμού.

[1.3] Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

Θεωρία

1) Το άθροισμα δύο ή περισσότερων μονωνύμων που δεν είναι όμοια ονομάζεται **πολυώνυμο**.
    1. Κάθε μονώνυμο αυτού του πολυωνύμου ονομάζεται **όρος**.
    2. Αν το πολυώνυμο έχει δύο όρους τότε λέγετε **διώνυμο**.
    3. Αν έχει τρεις τότε λέγετε **τριώνυμο**.
    4. Κάθε αριθμός είναι το **σταθερό πολυώνυμο** και είναι μηδενικού βαθμού.
    5. Ο αριθμός 0 είναι το **μηδενικό πολυώνυμο** και δεν έχει βαθμό.
2) Ένα πολυώνυμο μπορεί να έχει μία ή περισσότερες μεταβλητές. *Αν περιέχει δύο ή περισσότερες μεταβλητές τότε:*
    1. ο **βαθμός** του είναι το μεγαλύτερο άθροισμα των εκθετών των όρων του, π.χ. ο βαθμός του πολυωνύμου $2x^2y+3x^3y+2xy$ είναι 4.
    2. ο **βαθμός του ως προς μία μεταβλητή** είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης αυτής της μεταβλητής, π.χ. ο βαθμός του παραπάνω πολυωνύμου ως προς x είναι 3.
3) *Αν ένα πολυώνυμο περιέχει μόνο μία μεταβλητή τότε:*
    1. τότε ο **βαθμός** του είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης αυτής της μεταβλητής
    2. συνήθως **διατάσσουμε τους όρους κατά φθίνουσες δυνάμεις** αυτής της μεταβλητής.
4) Δύο πολυώνυμα είναι **ίσα** όταν οι όμοιοι όροι των δυο αυτών πολυωνύμων είναι ίσοι.
5) Μπορούμε να **προσθέσουμε** ή να **αφαιρέσουμε** δύο πολυώνυμα σύμφωνα με τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και συγκεκριμένα προσθέτοντας και αφαιρώντας τους όμοιους όρους.
    1. Όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε όμοιους όρους ονομάζουμε την διαδικασία αυτή **αναγωγή όμοιων όρων**.
    2. Όταν έχουμε αντίθετους όρους τότε κάνουμε **απαλοιφή αντίθετων όρων**, διότι έχουν άθροισμα μηδέν.
    3. Όταν **μπροστά από μία παρένθεση** υπάρχει αρνητικό πρόσημο τότε απλοποιούμε την παρένθεση αλλάζοντας όλα τα πρόσημα των όρων μέσα σε αυτήν. Όταν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει θετικό πρόσημο, απλοποιούμε την παρένθεση χωρίς να αλλάξουμε τα πρόσημα των όρων μέσα σε αυτήν.
    4. Για την αφαίρεση είναι $P(x)-Q(x)=P(x)+[-Q(x)]$.

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) Να βρείτε τους όρους του πολυωνύμου $x^2+3x^2y-3y^2x-x^3$.
2) Να βρείτε τους όρους των πολυωνύμων:
   i. $\alpha x^2+\beta x^3-3xy$,
   ii. $2x^2+3x+4$,
   iii. $5x^2-6y^2$
3) Να βρείτε τους όμοιους όρους του πολυωνύμου: $3x^2+2x+4x^2+6x^3+7x^3$.
4) Είναι τα παρακάτω πολυώνυμα:
   i. 1, 2, 3, -4, -7
   ii. 0
   iii. x , y , xy , x^2y , $2x^2$, $\sqrt{4}x^2y^3$
5) Από τις παρακάτω περιπτώσεις: x^2 , $3xy^3$, $3x^3+2x^2$, $3x^2+2x^2$, $3x^2y+3x^2y^2$, $2x^2+3x^2y+4y^2x^3$, $2x^2+3x+5$, x^2-y^2 , x να επιλέξετε
   i. τα μονώνυμα,
   ii. τα πολυώνυμα,
   iii. τα διώνυμα
   iv. τα τριώνυμα.
6) Να βρείτε τον βαθμό των πολυωνύμων: x^2 , $3xy^3$, $3x^3+2x^2$, $3x^2+2x^2$, $3x^2y+3x^2y^2$, $2x^2+3x^2y+4y^2x^3$, $2x^2+3x+5$, x^2-y^2 , x , ως προς x, ως προς y και ως προς x και y.
7) Να βρείτε τον βαθμό των πολυωνύμων: x , x^2 , $x+x^2$, $2x^6+2x^3+6x^7$.
8) Να διατάξετε τα παρακάτω πολυώνυμα κατά φθίνουσες δυνάμεις του x: $x+x^2$, $x^2+x^3+3x^7$, $4x-3x^2-3$, $x-x^3+6$ $2x^3-4x+5$, $7x-5+x^4$
9) Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων:
   i. $x-2x$
   ii. $x^2-2x^2+x^3$
   iii. x^3-x-x^3+2x
10) Να κάνετε απαλοιφή αντίθετων όρων:
   i. $x-2x+x$
   ii. $2x^2-3x-2x^2$
   iii. $-ax^2-2x+ax^2+2x+b$

Μάθημα 2

1) Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι πολυώνυμα;
   i. $3x^2-2x+\sqrt{x}$
   ii. $\sqrt{2}x^2+3x^3+2y$
   iii. $\frac{1}{x}+3x^3+4x^2y$
   iv. $\sqrt{2}x^2+\frac{1}{3}x+4$
2) Ποια από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι δευτέρου βαθμού;
   i. $x+2x^2+3$
   ii. y^2+2x^2+3
   iii. x^3y+x^2+5
   iv. $3x^2+5x+3x^2y$
3) Να γραφεί το πολυώνυμο $P(x)=4x^2-2x+5x^3+4+x$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.
4) Ένα εργοστάσιο ξυλείας κατασκευάζει ημερησίων x ξύλινους δοκούς. Να

βρείτε το πολυώνυμο που εκφράζει το ποσό που ξοδεύει (κόστος) ημερησίως αν πληρώνει 200€ για μισθούς υπαλλήλων, 10€ για την ξυλεία που επαιτεί κάθε ξύλινος δοκός και $2x^2$ για τα υπόλοιπα έξοδα της (μεταφορικά, ηλεκτρικό ρεύμα κτλ).

5) Αν $P(x)=2x^2-3x+5$ να υπολογίσετε
   i. την αριθμητική του τιμή για $x=0$
   ii. την $P(2)$,
   iii. $2\cdot P(-3)$

6) Αν $P(x)=4x^3-8x^2+x+7$ και $Q(x)=x^3-6x+2$, να προσδιορίσετε το πολυώνυμο:
   i. P(x)+Q(x)
   ii. P(x)-Q(x)
   iii. Q(x)-P(x)

7) Αν $P(x)=x^2-3x+5$ να προσδιορίστε το πολυώνυμο:
   i. P(x)+P(x)
   ii. 2P(x)
   iii. 2P(x)+3P(x)
   iv. P(-x)
   v. P(2x)
   vi. P(2x)-P(-x)

8) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^2+3x$ και $Q(x)=ax^2+3x$. Τι τιμή πρέπει να έχει το α ώστε τα πολυώνυμα να είναι ίσα;

9) *(Παράδειγμα 1, σελ 34, σχολικό).* Να γραφεί το πολυώνυμο $P(x)=4x^2-8x+ax^3-5$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρεθεί ο βαθμός του. Αν το P(x) είναι ίσο με το πολυώνυμο $Q(x)=\beta x^2+\gamma x+\delta$, ποιες είναι οι τιμές των α, β, γ, δ;

Μάθημα 3

1) *(Παράδειγμα 2, σχολικό, σελ 35).* Μία βιοτεχνία ρούχων για να κατασκευάσει x πουκάμισα ξοδεύει ημερησίως 500€ για μισθούς υπαλλήλων, 10€ για τα υλικά που απαιτεί κάθε πουκάμισο (ύφασμα, κλωστές, …) και $\frac{1}{10}x^2$ € για τα υπόλοιπα έξοδα της (μεταφορικά, ηλεκτρικό ρεύμα…). Πόσα ξοδεύει ημερησίως για την κατασκευή x πουκαμίσων; Ποια θα είναι τα έξοδα της βιοτεχνίας, αν κατασκευάσει 50 πουκάμισα;

2) *(Παράδειγμα 3, σχολικό, σελ 35).* Αν $P(x)=x^2-3x+4$, να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $Q(x)=P(2x)-P(-x)$.

3) *(Ερώτηση 1, σχολικό, σελ 35).* Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι πολυώνυμα;
   i. $4x^3-5x^2+2x-\frac{1}{x}$
   ii. $3x^4-7x^2-12$
   iii. $\sqrt{2}x^2y-5xy+y^2+\frac{1}{3}$
   iv. $x^3+2x^2y-\sqrt{x}y^2+3y^3$

4) *(Ερώτηση 2, σχολικό, σελ 35).* Ποια από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι 2ου βαθμού ως προς x;
   i. $7-3x-2x^2$
   ii. $3x^2-5x-3x^2+10$
   iii. $4x^3+x^2+2x-x^3+6$

iv. $2xy-3y+9$

5) *(Ερώτηση 3, σχολικό, σελ 36).* Αν $P(x)=4x^3-8x^2+x+7$ και $Q(x)=x^3-6x+2$ να υπολογίσετε:

i. P(x)+Q(x)

ii. P(x)-Q(x)

6) *(Ερώτηση 4, σχολικό, σελ 36).* Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Το πολυώνυμο που πρέπει να προσθέσουμε στο $2x^2+5x+7$ για να βρούμε άθροισμα $8x^2+4x-5$ είναι το:

i. $6x^2+x-2$

ii. $10x2+9x+2$

iii. $6x^2-x-12$

iv. $-6x^2+x+12$

7) *(Ερώτηση 5, σχολικό, σελ 36).* Τα πολυώνυμα $A(x)$, $B(x)$ και $\Gamma(x)$ έχουν βαθμούς 2, 3 και 2 αντιστοίχως.

i. Να βρείτε το βαθμό του πολυώνυμου $A(x)+B(x)$.

ii. Αν το πολυώνυμο $A(x)+\Gamma(x)$ δεν είναι το μηδενικό, τι βαθμό μπορεί να έχει;

8) *(Άσκηση 1, σχολικό, σελ 36).* Να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

i. $P(x)=3x-5x^2+x^4+10+2x^3$

ii. $Q(x)=-6x+2x^3+1$

iii. $A(x)=-3x^2+7+2x^3+7x$

iv. $B(x)=x-x^4-5$

9) *(Άσκηση 2, σχολικό, σελ 36).* Δίνεται το πολυώνυμο $A=-2xy^2+y^3+2x^3-xy^2$.

i. Να βρείτε την αριθμητική του τιμή για $x=2$ και $y=-1$.

ii. Να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του y. Ποιος είναι ο βαθμός του ως προς x και y;

10) *(Άσκηση 3, σχολικό, σελ 36).* Αν $P(x)=2x^2+2x-9$, να αποδείξετε ότι:

i. $P(-3)=P(2)$

ii. $3P(1)+P(3)=0$

Μάθημα 4

1) *(Άσκηση 4, σχολικό, σελ 36).* Η επιφάνεια ενός σταδίου αποτελείται από δύο ημικυκλικούς δίσκους και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που έχει μήκος 100 μέτρα και πλάτος 2x μέτρα.

i. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του.

ii. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του, αν το πλάτος του είναι ίσο με 60 μέτρα.

2) *(Άσκηση 5, σχολικό, σελ 37).* Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(2x^2-x)-(x^3-5x^2+x-1)$

ii. $-3x^2y-(2xy-yx^2)+(3xy-y^3)$

iii. $(2\alpha^2-3\alpha\beta)-(\beta^2+4\alpha\beta)-(\alpha^2+\beta^2)$

iv. $2\omega^2-[4\omega-3-(\omega^2+5\omega)]$

v. $(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+1)-(\frac{1}{6}x+x^2-\frac{1}{3})$

vi. $(0.4x^3+2.3x^2)+(3.6x^3-0.3x^2+4)$

3) *(Άσκηση 6, σχολικό, σελ 37).* Αν $A(x)=2x^3-x^2+x-4$, $B(x)=-3x^3+5x-2$ και

$\Gamma(x)=4x^2-3x+8$, να βρείτε τα πολυώνυμα:

i. $A(x)-B(x)$

ii. $A(x)+\Gamma(x)$

iii. $\Gamma(x)-[A(x)+B(x)]$

4) *(Άσκηση 9, σχολικό, σελ 37).* Αν $P(x)=(-5x^2+4x-3)-(x^2-2x+1)+(3x^2+x)$ και $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

5) Ένας ποδηλάτης κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο προς μία κατεύθυνση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u=3m/s$. Να γράψετε πολυώνυμο που να υπολογίζει το διάστημα που έχει διανύσει μετά από χρόνο t.

6) Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την ηρεμία με και κινείται προς τα δεξιά με σταθερή επιτάχυνση $\alpha=2m/s^2$. Να γράψετε πολυώνυμο που να υπολογίζει το διάστημα που έχει διανύσει ο ποδηλάτης μετά από χρόνο t.

7) Ένας ποδηλάτης κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο προς μία κατεύθυνση με ταχύτητα $u_0=2m/s$. Όταν περνά από το σημείο Α αρχίζει να επιταχύνει με επιτάχυνση $\alpha=3m/s^2$. Να υπολογίστε πολυώνυμο που να υπολογίζει το διάστημα που έχει διανύσει ο ποδηλάτης από το σημείο Α σε χρόνο t.

8) *(Άσκηση 5, σχολικό, σελ 37).* Ένας ποδηλάτης ξεκινάει από το σημείο Α και σε χρόνο t sec κατεβαίνει το δρόμο ΑΒ με επιτάχυνση $\alpha=2m/sec^2$. Όταν φτάσει στο σημείο Β, συνεχίζει να κινείται στο δρόμο ΒΓ για 10 sec με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε την παράσταση που εκφράζει την απόσταση που διήνυσε ο ποδηλάτης. Ποια απόσταση διήνυσε ο ποδηλάτης, αν $t=5\,sec$;

9) *(Άσκηση 7, σχολικό Φυσικής Α Λυκείου, σελ 69).* Ένας μοτοσυκλετιστής ξεκινά από την ηρεμία και κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση $2m/s^2$. Να υπολογιστούν:

i. Η ταχύτητά του μετά από 15s.

ii. Η απόσταση που διάνυσε στο χρόνο αυτό.

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Να βρείτε τους όρους του πολυωνύμου $x^2+3x^2y-3y^2x-x^3$.

2) Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων:

i. $x-2x$

ii. $x^2-2x^2+x^3$

iii. x^3-x-x^3+2x

3) Να γραφεί το πολυώνυμο $P(x)=4x^2-2x+5x^3+4+x$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

4) Αν $P(x)=x^2-3x+5$ να προσδιορίστε το πολυώνυμο:

i. P(x)+P(x)

ii. 2P(x)

iii. 2P(x)+3P(x)

iv. P(-x)

v. P(2x)

vi. P(2x)-P(-x)

Κριτήριο 2

1) Αν $P(x)=x^2-3x+4$, να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $Q(x)=P(2x)-P(-x)$.

2) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Το πολυώνυμο που πρέπει να προσθέσουμε στο $2x^2+5x+7$ για να βρούμε άθροισμα $8x^2+4x-5$ είναι το:
   i. $6x^2+x-2$
   ii. $10x2+9x+2$
   iii. $6x^2-x-12$
   iv. $-6x^2+x+12$

3) Ένας ποδηλάτης κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο προς μία κατεύθυνση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u=3m/s$. Να γράψετε πολυώνυμο που να υπολογίζει το διάστημα που έχει διανύσει μετά από χρόνο t.

4) Αν $P(x)=(-5x^2+4x-3)-(x^2-2x+1)+(3x^2+x)$ και $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

[1.4] Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Θεωρία

1) Για να πολλαπλασιάσουμε ένα μονώνυμο με ένα πολυώνυμο χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$, π.χ. $3x^2\cdot(2x^3+6x)=(3x^2)\cdot(2x^3)+(3x^2)\cdot(6x)$
2) Για να πολλαπλασιάσουμε ένα πολυώνυμο με ένα άλλο πολυώνυμο χρησιμοποιούμε πάλι την επιμεριστική ιδιότητα $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$.
3) Το αποτέλεσμα αυτών των πολλαπλασιασμών ονομάζεται **ανάπτυγμα του γινομένου**.
4) Ο **βαθμός** του αποτελέσματος ισούται με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων που πολλαπλασιάζουμε.

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) Να βρείτε τα μονώνυμα από τα οποία αποτελούνται τα παρακάτω πολυώνυμα:
   i. $3x^2+5x$
   ii. $6x^3y+3x^2-3x+5$
   iii. $-7xy^3+2xy^4-3x-5$
   iv. $\sqrt{3}x^2-3\sqrt{5}x-6$
2) Αν $P(x)=x^3+2x^2-6$ και $Q(x)=2x^2-5$ να υπολογίσετε τον βαθμό του γινομένου $P(x)\cdot Q(x)$. Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα;
3) Να κάνετε τις πράξεις:
   i. $x\cdot(x+2x^2)$,
   ii. $-2x\cdot(x+y)$
   iii. $2x^2\cdot(5x-2x)$
   iv. $\sqrt{3}x\cdot(\sqrt{3}x-x^2)$
4) Να κάνετε τις πράξεις:
   i. $(x+xy)\cdot x^2$
   ii. $(2x-3x^2+5)\cdot(-y)$
   iii. $(4x-3)\cdot xy^2$
   iv. $(\alpha+\beta)x\alpha^2$
5) Να κάνετε τις πράξεις:
   i. $3x(2xy+3x-5xy^2)$
   ii. $\frac{1}{2}x(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x)$
   iii. $3x^3\cdot(\frac{1}{2}x-\sqrt{3}xy^2)$
   iv. $\frac{1}{\sqrt{3}}xy\cdot(\frac{\sqrt{3}}{3}xy^2-5+6x)$
6) Να κάνετε τις πράξεις:
   i. $x\cdot(y^2)\cdot(x+y)$
   ii. $(xy^2)\cdot(x^3)\cdot(x^2+2xy)$
   iii. $(-x)\cdot(-2x^2)\cdot(x^2-3x^2y)$
   iv. $x\cdot(x+y)\cdot y$
   v. $(x+y)\cdot x\cdot y$
7) Να γίνουν οι πράξεις:
   i. $(x+2)(x-1)$

ii. $(x-2)(x+2)$

iii. $(3-x)(x+3)$

iv. $(-2-x^2)(-x-5)$

8) Να γίνουν οι πράξεις:

i. $(x+2)(2x-3+y)$

ii. $(-x+4)(2xy^2-3xy+6)$

iii. $(x+2)(x^2+x-3)$

iv. $(x+2x-x^2)(x-3)$

9) Να γίνουν οι πράξεις:

i. $(x^2+2x-3)(3x^2-4x+2)$

ii. $(x^2+2x-3)(x^2+2x-3)$

10) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2(x-3)+4(x-5)$

ii. $2x(x-3)+4x(x-5)$

iii. $2x^2(x^2-3)+4x(x^2-5x+3)$

iv. $2x(x^2+x)-2x(x^2-2x)+6(x-2)$

Μάθημα 2

1) *(Παράδειγμα 1, σχολικό, σελ 39).* Να γίνουν οι πράξεις).

i. $-\frac{2}{3}x^2y(x-\frac{1}{3}y-3)$

ii. $(2x^2-5x+6)(x-2)$

iii. $4x(-2x^2+3x-1)-3x^2(-2x+5)$

iv. $-2x^2(x+4)(x-1)$

2) *(Ερώτηση 1, σχολικό, σελ 40).* Να γίνουν οι πράξεις:

i. $x(x+1)$

ii. $(x+1)(x-1)$

iii. $x(x-1)$

iv. $(x+1)(1+x)$

v. $(x+1)(x+2)$

3) *(Ερώτηση 2, σχολικό, σελ 40).* Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή με Λ αν είναι λανθασμένες.

i. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό 3 και το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό 2, τότε το πολυώνυμο $P(x)\cdot Q(x)$ έχει βαθμό 6

ii. Αν το πολυώνυμο $P(x)\cdot Q(x)$ έχει βαθμό 7 και το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό 3 τότε το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό 4

4) *(Άσκηση 1, σχολικό, σελ 41).* Να κάνετε τις πράξεις:

i. $-3x^2y(-5x+2y)$

ii. $4x(2x^2-x+2)-8x$

iii. $-5x(2x-3)-3x(2-3x)$

iv. $2xy(x^2-3y^2)-4x(x^2y-2y^3)$

5) *(Άσκηση 2, σχολικό, σελ 41).* Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(2\alpha-3\beta)(-4\alpha+2\beta)$

ii. $(x^2-2x+4)(x+2)-8$

iii. $3x^2(-2x+3)(5-x)$

iv. $(4-3x)(5-2x)-6x(x-4)$

v. $(2x^2-3x-4)(-3x^2+x)$

vi. $(3x^2-2xy-5y^2)(4y-x)$

6) *(Άσκηση 3, σχολικό, σελ 41).* Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(3x-2)(x^2-x)(4x-3)$

ii. $-2x(x^2-x+1)(x-2)-$
$-(x-1)(2x-3)(x+2)$

iii. $(-2x+y)(x^2-3xy)-$
$-(3x-y)(4x+y)(-2x-3y)$

7) Να γίνουν οι πράξεις:

i. $(x^2-2y)3y+(xy-y^2)(-x)+$
$+(x+y)(-2xy)$

ii. $2[4(x-y)-2(3x+y)]+$
$+2[3(x^2-xy+y^2)-(x^2-y)]$

iii. $2[2(x-y)-3(x-2y)]-$
$-4[3(x^2-y^2)+7xy-(x^2-y)]$

iv. $(x+y)(y+z)-(z+\omega)(\omega+x)-$
$-(x+z)(y-\omega)$

8) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(x+y)^2$

ii. $(x-y)^2$

iii. $(x-y)(x+y)$

iv. $(x+y)^3$

v. $(x-y)^3$

9) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο: $P(x)=(x+2)^2-2(x-1)^2-4(x+1)^2+5x^2$ είναι το μηδενικό.

10) Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x)=x+2$ και $g(x)=x-2$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $g(x)\cdot f(x)$

ii. $[f(x)]^2$

iii. $[g(x)]^2$

iv. $f(x+1)$

v. $g(-x)$

vi. $f(x+1)\cdot g(x+1)$

vii. $f(-x)\cdot g(-x)$

Μάθημα 3

1) Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα $ax+ay=a(x+y)$ να κάνετε τις πράξεις:

i. $\alpha x+\alpha y$

ii. $xy+xa^2$

iii. $x^2y+x^2a^2$

2) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις απαλείφοντας τις παρενθέσεις:

i. $-(x^2+y^2-3x-5)$

ii. $-(2x-3)-(x^2-2x)$

3) *(Άσκηση 5, σχολικό, σελ 41).* Αν $P(x)=-2x^2+5x-3$ και $Q(x)=4x-5$, να βρείτε τα πολυώνυμα:

i. $P(x)\cdot Q(x)$

ii. $P(x)\cdot[-3Q(x)+11x-12]$

iii. $[P(x)-2]\cdot[Q(x)+3]$

4) Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές $P(x)=-2x^2+5x-3$ και $Q(x)=4x-5$, να βρείτε:

i. το εμβαδόν του

ii. την περίμετρό του.

5) *(Άσκηση 6, σχολικό, σελ 41).* Αν $P(x)=3x(-2x+4)(x-1)$ και $Q(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ, ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

6) Αν $f(x)=x-2$, $g(x)=2x-3$ και $h(x)=1-x$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$

ii. $[f(x)-g(x)]\cdot h(x)$

iii. $2[3g(-x)-4f(x+1)]-3h(-x+2)$

7) Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^2$ να υπολογίσετε:

i. f(0),

ii. f(1), f(-1),

iii. f(2), f(-2)

iv. f(3), f(-3)

v. Ποια νομίζετε ότι είναι η μικρότερη τιμή που παίρνει αυτό το πολυώνυμο;

vi. Ποια νομίζετε ότι είναι η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει αυτό το πολυώνυμο;

8) Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=16-x^2$ να υπολογίσετε:

i. f(0),

ii. f(1), f(-1),

iii. f(2), f(-2)

iv. f(3), f(-3)

v. Ποια νομίζετε ότι είναι η μικρότερη τιμή που παίρνει αυτό το πολυώνυμο;

vi. Ποια νομίζετε ότι είναι η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει αυτό το πολυώνυμο;

9) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $p(x)=(2x+3)^2-(2x+1)^2$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

10) Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $(x+3y)^2+(x-3z)^2-$ $-3(x+y+z)^2+(x^2+y^2+z^2)$ είναι ανεξάρτητη του x

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Αν $P(x)=x^3+2x^2-6$ και $Q(x)=2x^2-5$ να υπολογίσετε τον βαθμό του γινομένου $P(x)\cdot Q(x)$. Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα;

2) Να γίνουν οι πράξεις:

i. $(x+2)(x-1)$

ii. $(x-2)(x+2)$

iii. $(3-x)(x+3)$

iv. $(-2-x^2)(-x-5)$

3) Να γίνουν οι πράξεις:

i. $(x^2-2y)3y+(xy-y^2)(-x)+$ $+(x+y)(-2xy)$

ii. $2[4(x-y)-2(3x+y)]+$ $+2[3(x^2-xy+y^2)-(x^2-y)]$

iii. $2[2(x-y)-3(x-2y)]-$ $-4[3(x^2-y^2)+7xy-(x^2-y)]$

iv. $(x+y)(y+z)-(z+\omega)(\omega+x)-$ $-(x+z)(y-\omega)$

4) Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x)=x+2$ και $g(x)=x-2$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $g(x)\cdot f(x)$

ii. $[f(x)]^2$

iii. $[g(x)]^2$

iv. $f(x+1)$

v. $g(-x)$

vi. $f(x+1)\cdot g(x+1)$

Κριτήριο 2

1) Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές $P(x)=-2x^2+5x-3$ και $Q(x)=4x-5$, να βρείτε:
   i. το εμβαδόν του
   ii. την περίμετρό του.
2) Αν $P(x)=3x(-2x+4)(x-1)$ και $Q(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ, ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.
3) Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^2$ να υπολογίσετε:
   i. f(0),
   ii. f(1), f(-1),
   iii. f(2), f(-2)
   iv. f(3), f(-3)
   v. Ποια νομίζετε ότι είναι η μικρότερη τιμή που παίρνει αυτό το πολυώνυμο;
   vi. Ποια νομίζετε ότι είναι η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει αυτό το πολυώνυμο;
4) Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $(x+3y)^2+(x-3z)^2-$ $-3(x+y+z)^2+(x^2+y^2+z^2)$ είναι ανεξάρτητη του x

[1.5] Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Θεωρία

1) **Μαθηματική απόδειξη** είναι μία διαδικασία η οποία επικυρώνει ότι μία μαθηματική πρόταση είναι ορθή. Δηλαδή η απόδειξη πρέπει να δείχνει ότι μια πρόταση είναι αληθής για όλες τις περιπτώσεις που εφαρμόζεται, χωρίς καμία εξαίρεση, π.χ. η πρόταση $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ αληθεύει για κάθε τιμή των μεταβλητών α και β και αυτό αποδεικνύεται με τα παρακάτω βήματα:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)\\ &= \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

Όταν έχουμε μία ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε, μεταξύ άλλων, μπορούμε να κάνουμε τα παρακάτω
i. Να κάνουμε πράξεις στο πρώτο μέλος και να βρούμε σαν αποτέλεσμα το δεύτερο μέλος.
ii. Να κάνουμε πράξεις στο δεύτερο μέλος και να βρούμε το πρώτο
iii. Να κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη ώστε να βρούμε κοινό αποτέλεσμα.
Υπάρχουν αρκετοί μέθοδοι για να αποδείξουμε ότι μία μαθηματική πρόταση είναι αληθής, π.χ. η μέθοδος που ονομάζεται “Απαγωγή σε άτοπο” ή η “Τέλεια επαγωγή”, κ.α.

2) **Ταυτότητα** είναι κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της. Δηλαδή,

   i. Είναι ισότητες που μπορούμε να τις χρησιμοποιούμε χωρίς να τις αποδεικνύουμε κάθε φορά.

   ii. Επομένως πρέπει να τις αποστηθίσουμε

   iii. Οι παρακάτω είναι οι βασικές ταυτότητες μαζί με τις αποδείξεις τους. Πρέπει να μάθετε και τις αποδείξεις.

      i. Τετράγωνο αθροίσματος $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)\\ &= \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

      ii. Τετράγωνο διαφοράς $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2 &= (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)\\ &= \alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2\\ &= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

      iii. Κύβος αθροίσματος $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)\\ &= (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)\\ &= \alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha+\beta^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\end{aligned}$$

iv. Κύβος διαφοράς $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^3 &= (\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)\\ &= (\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha-\beta)\\ &= \alpha^3-\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha-\beta^3\\ &= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3\end{aligned}$$

v. Διαφορά τετραγώνων $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) &= \alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha-\beta^2\\ &= \alpha^2-\beta^2\end{aligned}$$

vi. Άθροισμα κύβων $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) &= \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+\beta^3\end{aligned}$$

vii. Διαφορά κύβων $(\alpha-\beta^3)=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) &= \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3\\ &= \alpha^3-\beta^3\end{aligned}$$

viii. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha+\beta+\gamma)\\ &= \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\alpha+\beta^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\gamma\beta+\gamma^2\\ &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta\gamma\end{aligned}$$

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) Να υπολογίσετε την παράσταση $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$, με την βοήθεια:
   i. της επιμεριστικής ιδιότητας και
   ii. της ταυτότητας: “διαφορά τετραγώνων”.

2) Να υπολογίσετε την παράσταση $(2+\sqrt{3})^2$, με την βοήθεια:
   i. της επιμεριστικής ιδιότητας και
   ii. της ταυτότητας: “τετράγωνο αθροίσματος”.

3) Να υπολογίσετε την παράσταση $(3-\sqrt{5})^2$, με την βοήθεια:
   i. της επιμεριστικής ιδιότητας και
   ii. της ταυτότητας: “τετράγωνο διαφοράς”.
4) Αφού αποστηθίσετε τις βασικές ταυτότητες να τις γράψετε.
5) Να αποδείξετε τις βασικές ταυτότητες.
6) Με την βοήθεια των ταυτοτήτων να κάνετε τις πράξεις:
   i. $(\alpha+3)^2$
   ii. $(3+\alpha)^2$
   iii. $(\alpha-3)^2$
   iv. $(3-\alpha)^2$
   v. $(-3-\alpha)^2$
   vi. Αφού βρείτε τις τιμές των παραπάνω αποτελεσμάτων για $\alpha=1$, να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.
7) Με την βοήθεια των ταυτοτήτων να κάνετε τις πράξεις:
   i. $(\alpha+5)^2$
   ii. $(y+5)^2$
   iii. $(\kappa+\lambda)^2$
   iv. $(2x+5)^2$
   v. $(x^2+2)^2$
   vi. $(x+\sqrt{2})^2$
   vii. $\left(\frac{1}{2}+x\right)^2$
8) *(Άσκηση 1, σχολικό, σελ 49).* Να βρείτε τα αναπτύγματα:
   i. $(x+2)^2$
   ii. $(y+5)^2$
   iii. $(2\omega+1)^2$
   iv. $(\kappa+2\lambda)^2$
   v. $(3y+2\beta)^2$
   vi. $(x^2+1)^2$
   vii. $(y^2+y)^2$
   viii. $(2x^2+3x)^2$
   ix. $(x+\sqrt{2})^2$
   x. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$
   xi. $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2$
   xii. $\left(\omega+\frac{4}{\omega}\right)^2$
9) Με την βοήθεια των ταυτοτήτων να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:
   i. $(\alpha-2)^2$
   ii. $(y-3)^2$
   iii. $(\kappa-\lambda)^2$
   iv. $(2x-5)^2$
   v. $(x-\sqrt{3})^2$
   vi. $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$
10) *(Άσκηση 2, σχολικό, σελ 49).* Να βρείτε τα αναπτύγματα:
   i. $(x-3)^2$
   ii. $(y-5)^2$
   iii. $(3\omega-1)^2$
   iv. $(2\kappa-\lambda)^2$
   v. $(3y-2\beta)^2$

vi. $(x^2-2)^2$

vii. $(y^2-y)^2$

viii. $(2x^2-5x)^2$

ix. $(x-\sqrt{3})^2$

x. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$

xi. $(\alpha-\frac{3}{2})^2$

xii. $(\omega-\frac{2}{\omega})^2$

Μάθημα 2

1) Με την βοήθεια των ταυτοτήτων να κάνετε τις παρακάτω πράξεις.

i. $(x-1)(x+1)$

ii. $(x-2)(x+2)$

iii. $(x+2)(x-2)$

iv. $(x+2)(-2+x)$

v. $(x+2)(2-x)$)

vi. $(-x-2)(x-2)$

2) Με την βοήθεια των ταυτοτήτων να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

i. $(x-y)(x+y)$

ii. $(2x-3)(2x+3)$

iii. $(2x-y)(2x+y)$

iv. $(3\alpha-5\beta)(3\alpha+5\beta)$

v. $(x^2-3)(x^2+3)$

vi. $(x^2+1)(1-x^2)$

vii. $(\frac{x}{2}-3)(\frac{x}{2}+3)$

viii. $(\frac{x}{z}+\frac{y}{w})(\frac{x}{z}-\frac{y}{w})$

3) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$.

4) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$

ii. $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$

iii. $(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

iv. $(2\sqrt{3}+6)(2\sqrt{3}-6)$

5) *(Άσκηση 9, σχολικό, σελ 49)*. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρανομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρανομαστές.

i. $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

ii. $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

iii. $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$

iv. $\frac{12}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

6) Με την βοήθεια της διαφοράς τετραγώνων να κάνετε τις πράξεις:

i. $(x+2-y)(x+2+y)$

ii. $(x^2+4-2x)(x^2+4+2x)$

iii. $[x^2-2(x+1)][x^2+2(x+1)]$

iv. $(x-y-a)(x-y+a)$

7) Να αποδείξετε ότι για κάθε α και β ισχύει η ταυτότητα: $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$.

8) Να αποδείξετε ότι για κάθε α και β ισχύει: $\alpha\beta=(\frac{\alpha+\beta}{2})^2-(\frac{\alpha-\beta}{2})^2$.

9) (Άσκηση 14, σχολικό, σελ 50). Αφού αποδείξετε ότι $(\alpha+\frac{5}{\alpha})^2-(\alpha-\frac{5}{\alpha})^2=20$ να υπολογίσετε τον αριθμό $x=(2005+\frac{1}{401})^2-(2005-\frac{1}{401})^2$.

10) *(Ερώτηση 6, σχολικού, σελ 48)*. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i. Το ανάπτυγμα το $(y-3)(y+3)$ είναι:

α. y^2-3

β. y^2-9

γ. $9-y^2$

δ. $3-y^2$

ii. Το ανάπτυγμα το $(x+y)(x-y)$ είναι:

α. y^2-x^2

β. x^2-y^2

γ. $(x-y)^2$

δ. x^2+y^2

iii. Το ανάπτυγμα το $(\omega-2\alpha)(\omega+2\alpha)$ είναι:

α. $\omega^2-2\alpha^2$

β. $\omega^2+4\alpha^2$

γ. $4\alpha^2-\omega^2$

δ. $\omega^2-4\alpha^2$

Μάθημα 3

1) *(Άσκηση 5, σχολικού, σελ 49)*. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i. $(x+1)^3$

ii. $(y+4)^3$

iii. $(2a+1)^3$

iv. $(3\alpha+2\beta)^3$

v. $(x^2+3)^3$

vi. $(y^2+y)^3$

vii. $(x-2)^3$

viii. $(y-5)^3$

ix. $(3a-1)^3$

x. $(2x-3y)^3$

xi. $(y^2-2)^3$

xii. $(\omega^2-2\omega)^3$

2) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i. $(\frac{x}{2}-1)^3$

ii. $(\frac{3x}{2}-3)^3$

iii. $(\sqrt{5}+1)^3$

iv. $(4\sqrt{3}-3\sqrt{4})^3$

3) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$.

4) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i. $(x+y+z)^2$

ii. $(x+y-z)^2$

iii. $(x-y-z)^2$

iv. $(-x-y-z)^2$

5) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta^2+3\alpha^2\beta+3\alpha\gamma^2+3\alpha^2\gamma+3\beta\gamma^2+3\beta^2\gamma+6\alpha\beta\gamma$

6) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i. $(x+y+z)^3$

ii. $(x+y-z)^3$

iii. $(x-y-z)^3$

iv. $(-x-y-z)^3$

7) Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

ii. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

iii. $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

iv. $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

v. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

vi. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

vii. $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=4$

8) Δεδομένου ότι $19^2=(20-1)^2$ να υπολογίσετε τα αποτελέσματα: 19^2 , 21^2 18^2 , 22^2 .

9) “Μπορούμε να αποδείξουμε ότι μία ισότητα δεν είναι ταυτότητα αν μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον μία τιμή των μεταβλητών για την οποία αυτή η ισότητα δεν ισχύει”, π.χ. η ισότητα $x^2=4$ δεν είναι ταυτότητα αφού π.χ. για $x=1$ δεν ισχύει. Με αυτή την λογική ποιες από τις παρακάτω ισότητες δεν είναι ταυτότητες:

i. $x+y=0$

ii. $x^2+y^2=0$

iii. $x\cdot y=0$

iv. $0\cdot x=3$

v. $\sqrt{(x^2)}=x$

vi. Υπάρχουν κάποιοι συγκεκριμένοι αριθμοί για τους οποίους οι παραπάνω ισότητες αληθεύουν;

10) Εάν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα α και κάθετες πλευρές β και γ.

i. Να βρείτε ένα τρόπο ώστε να ισχυριστείτε ότι η ισότητα $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ είναι ταυτότητα.

ii. Εάν το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο τότε η παραπάνω ισότητα εξακολουθεί να είναι ταυτότητα;

iii. Μπορούμε άραγε, με κάποιον τρόπο να βρούμε μια αντίστοιχη σχέση μεταξύ των πλευρών που να ισχύει για κάθε τρίγωνο; Αν υπάρχει δεν χρειάζεται να κάνετε την απόδειξη. Υπόδειξη: αναζητήστε στην Wikipedia τον όρο “*Νόμο των συνημιτόνων*” ή “*γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα*”.

Μάθημα 4

1) *(Άσκηση 10, σχολικού, σελ 50).* Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i. $(x-3)(x^2+3x+9)$

ii. $(y+2)(y^2-2y+4)$

iii. $(2\omega+1)(4\omega^2-2\omega+1)$

iv. $(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)$

2) (Άσκηση 11, σχολικού, σελ 50). Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(x-4)^2+(2x+5)^2$

ii. $(\chi^2-1)^2-(\chi^2-3)(\chi^2+3)$

iii. $(x+y)^2-(x-2y)(x+2y)+(2x-y)^2$

iv. $(3x-4)^2+(3x+4)^2-$
$-2(3x-4)(3x+4)$

v. $(2\alpha+1)^3+(2\alpha-1)^3$

vi. $(\alpha+2)^3-(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)$

vii. $(\alpha^2+\alpha)^3-(\alpha^2-\alpha)^3$

viii. $(4\alpha-1)^3-\alpha(8\alpha+1)(8\alpha-1)$

3) *(Άσκηση 12., σχολικού, σελ 50).* Να αποδείξετε ότι:

i. $(x-2y)^2-(2x-y)^2+3x^2=3y^2$

ii. $(\alpha-3\beta)^2+(3\alpha+2\beta)(3\alpha-2\beta)-$
$-(3\alpha\beta)^2=\alpha^2+4\beta^2$

iii. $(x-1)(x+1)^3-2x(x-1)(x+1)=$
$=x^4-1$

iv. $(\alpha^2+\beta^2)^2-(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2$

v. $(\alpha-4)^2+(2\alpha-3)^2=\alpha^2+(2\alpha-5)^2$

vi. $(2x^2+2x)^2+(2x+1)^2=$
$=(2x^2+2x+1)^2$

4) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(x+y)(y-x)-(x+y)^2$

ii. $(2x+1)^2-4x^2-1$

iii. $(1-x)(1+x)+x^2$

iv. $(\alpha+3\beta)^2-(\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2)$

v. $(x+y)^2+(x-y)^2-(x-y)(x+y)$

vi. $(x-y)^2-(y-x)^2$

vii. $(2x-3y)^2-(2x+3y)^2+6x(2y+1)$

viii. $2(4x-3y)^2-3(y-2x)(2x+y)$
$-4(x+2y)^2$

5) Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $\left(\frac{x-3}{2}\right)^3-\left(\frac{x+3}{2}\right)^3=-\frac{9(x^2+3)}{4}$

ii. $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=$
$=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

iii. $(\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)^2=-4\alpha\beta$

iv. $(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha^2-\beta^2)^2=(2\alpha\beta)^2$

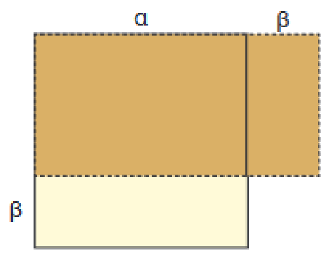
v. (α-β-γ)^2-(γ-α+β)^2=0

vi. $(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=\alpha^3-\beta^3$

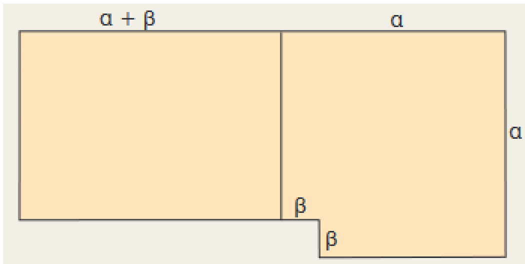
Μάθημα 5

1) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και $5x+2$ και δεύτερο επίσης ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $3x+2$ και $4x+1$. Να αποδείξετε ότι τα δύο αυτά τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες.

2) *(Παράδειγμα 3, σχολικού, σελ 46).* Σε ένα οικόπεδο που έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς α, αν μειωθεί η μία διάσταση του κατά β και ταυτόχρονα η άλλη διάσταση του αυξηθεί κατά β, πόσο θα μεταβληθεί το εμβαδόν του;

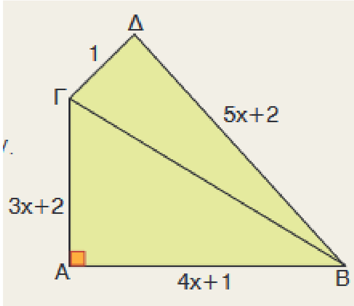


3) *(Άσκηση 18, σχολικού, σελ 51).* Ένας πατέρας μοίρασε ένα οικόπεδο στα δύο παιδιά του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο οικόπεδα είχαν το ίδιο εμβαδόν ή κάποιο από τα παιδιά αδικήθηκε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

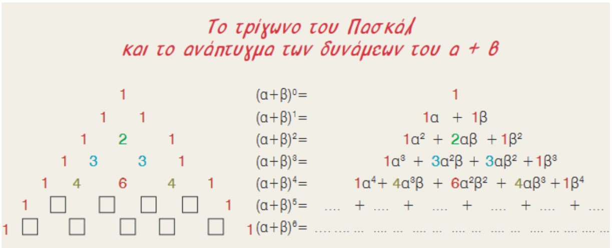


4) *(Άσκηση 15, σχολικού, σελ 50).* Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, να

αποδείξετε ότι και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



5) Να συμπληρώσετε το ανάπτυγμα των δυνάμεων του α+β:



6) Τι ονομάζουμε Πυθαγόρεια τριάδα; Να υπολογίσετε τις Πυθαγόρειες τριάδες με την βοήθεια των τύπων $\frac{\mu^2+1}{2}$, $\frac{\mu^2-1}{2}$, μ για $\mu=3,4,5$. Υπόδειξη: βλέπε το σχολικό στην σελίδα 52.

7) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2-(\alpha-1)(\alpha+1)=1$. Στην συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $(1.3265)^2-0.3265\cdot 2.3265$

8) Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών (του μικρότερου από του μεγαλύτερου) ισούται με το άθροισμά τους.

9) Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $2^{\nu}+2^{\nu+1}+2^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 7. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των δυνάμεων.

10) Αν α+β+γ=0 τότε να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$. Υπόδειξη: Λύστε την πρώτη σχέση ως προς α και αντικαταστήσετε στην δεύτερη.

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Με την βοήθεια των ταυτοτήτων να κάνετε τις πράξεις:
   i. $(\alpha+3)^2$
   ii. $(3+\alpha)^2$
   iii. $(\alpha-3)^2$
   iv. $(3-\alpha)^2$
   v. $(-3-\alpha)^2$
   vi. Αφού βρείτε τις τιμές των παραπάνω αποτελεσμάτων για $\alpha=1$, να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

2) Με την βοήθεια των ταυτοτήτων να κάνετε τις παρακάτω πράξεις.
   i. $(x-1)(x+1)$
   ii. $(x-2)(x+2)$
   iii. $(x+2)(x-2)$
   iv. $(x+2)(-2+x)$
   v. $(x+2)(2-x)$)
   vi. $(-x-2)(x-2)$

3) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$.

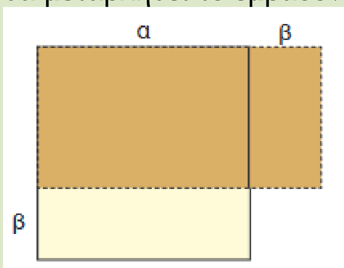
4) Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta^2+3\alpha^2\beta+3\alpha\gamma^2+3\alpha^2\gamma+3\beta\gamma^2+3\beta^2\gamma+6\alpha\beta\gamma$

Κριτήριο 2

1) Να κάνετε τις πράξεις:
   i. $(x-4)^2+(2x+5)^2$
   ii. $(\chi^2-1)^2-(\chi^2-3)(\chi^2+3)$
   iii. $(x+y)^2-(x-2y)(x+2y)+(2x-y)^2$
   iv. $(3x-4)^2+(3x+4)^2-2(3x-4)(3x+4)$
   v. $(2\alpha+1)^3+(2\alpha-1)^3$
   vi. $(\alpha+2)^3-(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)$
   vii. $(\alpha^2+\alpha)^3-(\alpha^2-\alpha)^3$
   viii. $(4\alpha-1)^3-\alpha(8\alpha+1)(8\alpha-1)$

2) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2-(\alpha-1)(\alpha+1)=1$. Στην συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$(1.3265)^2-0.3265\cdot 2.3265$

3) Σε ένα οικόπεδο που έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς α, αν μειωθεί η μία διάσταση του κατά β και ταυτόχρονα η άλλη διάσταση του αυξηθεί κατά β, πόσο θα μεταβληθεί το εμβαδόν του;



4) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και $5x+2$ και δεύτερο επίσης ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $3x+2$ και $4x+1$. Να αποδείξετε ότι τα δύο αυτά τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες.

[1.8] Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

Θεωρία

Από το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Α Γυμνασίου στην σελίδα 27 διαβάζομε τα παρακάτω:

1. **Πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού α είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς.
   i. Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
   ii. Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.
   iii. Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.
2. Το μικρότερο ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών ($\neq 0$) το ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** (ΕΚΠ) των αριθμών αυτών.
3. **Διαιρέτες** ενός φυσικού αριθμού α λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
   i. Κάθε αριθμός α έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1 και α.
4. Ένας αριθμός, εκτός από το 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1 λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**. Είναι δηλαδή οι αριθμοί: 2, 3, 5, 7, 11, 13, κτλ. είναι πρώτοι.
5. Δύο φυσικοί αριθμοί α και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (ΜΚΔ) των α και β και συμβολίζεται ΜΚΔ(α, β).
6. Δύο αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι ΜΚΔ(α, β) = 1.
7. **Κριτήρια Διαιρετότητας** με 2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25 λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.
   i. Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10** αν λήγει σε ένα μηδενικό.
   ii. Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.
   iii. Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5**, αν λήγει σε 0 ή 5.
   iv. Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.
   v. Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το **4** ή και το **25**, αν τα δύο τελευταία ψηφία του είναι μηδέν.
8. **Για να αναλύσουμε έναν αριθμό σε γινόμενα πρώτων παραγόντων** διαιρούμε διαδοχικά τον αριθμό αυτό με τους πρώτους αριθμούς 2, 3, 5, 7, κτλ μέχρι να προκύψει ο αριθμός 1. **Για να υπολογίσουμε με αυτόν τον τρόπο το ΕΚΠ** παίρνουμε μόνο τους κοινούς

παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη, ενώ **για να υπολογίσουμε το ΜΚΔ** παίρνουμε τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη, π.χ.

504	2	Αφού τελειώνει σε 4 διαιρείται με το 2.
252	2	Αφού τελειώνει σε 2 διαιρείται με το 5.
126	2	Αφού τελειώνει σε 6 διαιρείται με το 2.
63	3	Αφού το άθροισμα των ψηφίων του (9) διαιρείται με το 3
21	7	
3	3	
1		

Επομένως ο αριθμός 504 αναλύεται ως: $504=2^3\cdot 3^2\cdot 5^0\cdot 7^1$. Ακόμα:

980	2	Αφού τελειώνει σε 4 διαιρείται με το 2.
490	2	Αφού τελειώνει σε 0 διαιρείται με το 2.
245	5	Αφού τελειώνει σε 5 διαιρείται με το 5.
49	7	
7	7	
1		

Επομένως ο αριθμός 980 αναλύεται ως: $980=2^2\cdot 3^0\cdot 5^1\cdot 7^2$. Για να υπολογίσουμε τώρα το Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο πολλαπλασιάζουμε τους παράγοντες με τις μεγαλύτερες δυνάμεις, δηλαδή: $ЕКП(980,504)=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^2=17640$, ενώ για να υπολογίσουμε το Μέγιστο κοινό διαιρέτη πολλαπλασιάζουμε τους παράγοντες με τις μικρότερες δυνάμεις, δηλαδή $ЕКП(980,504)=$ $2^2\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^1=28$. Βλέπε το παράδειγμα 2 στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Α Γυμνασίου στην σελίδα 28.

9. Με ανάλογο τρόπο υπολογίσουμε **το ΕΚΠ και το ΜΚΔ δύο ή περισσότερων μονωνύμων ή και πολυωνύμων**. Δηλαδή, διαβάζουμε από το το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ Γυμνασίου ότι: “Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του. Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του”.

   i. Εάν έχουμε τα μονώνυμα $12x^3y^2=2^2\cdot 3^1\cdot 5^0\cdot x^3\cdot y^2\cdot\omega^0$, $24x^2y^3\omega=$ $2^3\cdot 3^1\cdot 5^0\cdot x^2\cdot y^3\cdot\omega$ και $300x^4y=2^2\cdot 3^1\cdot 5^2\cdot x^4\cdot y^1\cdot\omega^0$, υπολογίζουμε το ΕΚΠ ως το γινόμενο: $2^3\cdot 3^1\cdot 5^2\cdot x^4\cdot y^3\cdot\omega=600x^4y^3\omega$ και το ΜΚΔ ως: $2^2\cdot 3^1\cdot 5^0\cdot x^2\cdot y^1\cdot\omega^0=12x^2y$.

   ii. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με τα πολυώνυμα, αφού τα αναλύσουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων όπως θα δούμε στην παρακάτω ενότητα.

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) *(Παράδειγμα 2, Μαθηματικά Α Γυμνασίου, σελ 28).* Να αναλυθούν οι αριθμοί 2520, 2940, 3780 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με την βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.
2) *(Παράδειγμα 3, Μαθηματικά Α Γυμνασίου, σελ 29).* Να γράψετε όλους τους πρώτους αριθμούς μεταξύ του 1 και του 100.
3) *(Άσκηση 7, Μαθηματικά Α Γυμνασίου, σελ 30).* Να υπολογίστε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών:
   i. 5, 8
   ii. 16, 24
   iii. 30, 15
   iv. 10, 30, 60
   v. 22, 32, 50
4) *(Άσκηση 7, Μαθηματικά Α Γυμνασίου, σελ 30).* Να υπολογίστε τους διαιρέτες των αριθμών: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι και ποιοι είναι σύνθετοι;
5) *(Άσκηση 12, Μαθηματικά Α Γυμνασίου, σελ 30).* Να αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: 78, 384, 1210, 2344.
6) *(Άσκηση 3, Μαθηματικά Α Γυμνασίου, σελ 30).* Να υπολογίστε το ΕΚΠ των αριθμών:
   i. 3, 5
   ii. 11, 6
   iii. 5, 10
   iv. 3, 2, 5
   v. 3, 6, 9
   vi. 8, 12, 15

Μάθημα 2

1) Να αναλύσετε τα παρακάτω μονώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $12x^3y^2$, $24x^2y^3\omega$, $300x^4y$.
2) Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των μονωνύμων: $12x^3y^2$, $24x^2y^3\omega$, $300x^4y$.
3) *(Παράδειγμα 1, σχολικού, σελ 69).* Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των μονωνύμων $6x^3y\omega$, $9x^2y\omega^2$, $3xy^4$.
4) *(Άσκηση 1, σχολικού, σελ 70).* Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:
   i. $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$
   ii. $15\alpha xy^3$, $10\alpha x^2\omega^2$, $5y\omega^2$
5) Να βρείτε τον ΜΚΔ των παραστάσεων:
   i. $12x^2y$, $30xy^2$, $6x^2y^2$
   ii. $3x^2y$, $12y^3$
   iii. $16\alpha^3\beta$, 54β

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Να αναλυθούν οι αριθμοί 2520, 2940, 3780 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με την βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.

2) Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των μονωνύμων: $12x^3y^2$, $24x^2y^3\omega$, $300x^4y$.

3) Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:
   i. $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$
   ii. $15\alpha xy^3$, $10\alpha x^2\omega^2$, $5y\omega^2$

4) Ποια είναι τα κριτήρια διαιρετότητας;

[1.6] Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Θεωρία

1. **Γινόμενο** ονομάζεται το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού.
2. **Παράγοντες** είναι οι δύο ή περισσότεροι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε κατά την πράξη του πολλαπλασιασμού. Οι παράγοντες μπορεί να εμφανίζονται ως μεταβλητές ή ως σύνθετες μαθηματικές εκφράσεις, π.χ. παρακάτω βλέπουμε γινόμενα δύο παραγόντων:
   i. $2\cdot 3$, παράγοντες είναι οι αριθμοί 2 και 3.
   ii. $2\cdot x$, παράγοντες είναι ο αριθμός 2 και η μεταβλητή x.
   iii. $x\cdot y$, παράγοντες είναι οι μεταβλητές x και y.
   iv. $(x+1)\cdot 3$, παράγοντες είναι το πολυώνυμο $x+1$ και ο αριθμός 3.
   v. $(x^2+x+1)\cdot x$, παράγοντες είναι το πολυώνυμο x^2+x+1 και το μονώνυμο x.
3. **Πρώτος παράγοντας** είναι το πολυώνυμο που δεν μπορεί να αναλυθεί περισσότερο ως γινόμενο άλλων *μη σταθερών* πολυωνύμων. Μπορεί να είναι πρώτου ή και μεγαλύτερου βαθμού π.χ. δεύτερου. Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:
   i. Το πολυώνυμο x^2+x δεν είναι πρώτος παράγοντας αφού γράφεται ως $x^2+x=x\cdot(x+1)$, δηλαδή βρήκαμε δύο πολυώνυμα μικρότερου βαθμού που όταν πολλαπλασιάζονται δίνουν το x^2+x .
   ii. Το πολυώνυμο $x+2$ είναι πρώτος παράγοντας, αφού δεν μπορούμε να βρούμε δύο πολυώνυμα μικρότερου βαθμού που όταν πολλαπλασιάζονται να δίνουν το $x+2$.
   iii. Για να μην είναι πρώτος παράγοντας, το πολυώνυμο θα πρέπει να γράφεται ως γινόμενο άλλων μη σταθερών πολυώνυμων, π.χ. ενώ το $x+2$ μπορεί να γραφεί ως $x+2=\frac{1}{2}\cdot(2x+1)$, δηλαδή ως γινόμενο ενός σταθερού πολυωνύμου ($\frac{1}{2}$) και του $2x+1$ θεωρείται πρώτος παράγοντας.
   iv. Το πολυώνυμο x^2+x+1 είναι πρώτος παράγοντας διότι δεν αναλύεται περισσότερο.
4. **Παραγοντοποίηση** είναι η διαδικασία με την οποία μία παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων. Μας ενδιαφέρει ιδιαιτέρως η περίπτωση όπου η παράσταση παραγοντοποιείται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
5. **Για να κάνουμε παραγοντοποίηση**, μεταξύ άλλων, εφαρμόζουμε μία ή περισσότερες από τις παρακάτω μεθόδους:
   i. **Κοινός παράγοντας**, που γίνεται με την βοήθεια της *επιμεριστικής ιδιότητας*.

ii. **Κοινός παράγοντας κατά ομάδες**, που γίνεται με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

iii. **Διαφορά τετραγώνων**, που γίνεται με την βοήθεια της ταυτότητας: $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$.

iv. **Ανάπτυγμα τετραγώνου**, με την βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\beta+\beta^2$.

6. Η διαδικασία της παραγοντοποιησης είναι κατά κύριο ρόλο θέμα εμπειρίας παρόλα αυτά έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Εξετάζουμε αν υπάρχει κοινός παράγοντας και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

ii. Στον κοινό παράγοντα μπορεί να χρειαστεί να αλλάξουμε τα πρόσημα κάποιων όρων ή παρενθέσεων.

iii. Ο κοινός παράγοντας γίνεται και κατά ομάδες. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να χρειαστεί να διασπάσουμε κάποιον όρο.

iv. Αν η έκφραση έχει τρεις όρους εξετάζουμε εάν είναι α) ανάπτυγμα τετραγώνου, β) τριώνυμο, γ) εάν μπορούμε να διασπάσουμε έναν όρο, έτσι ώστε συνολικά να έχουμε τέσσερις όρους και να κάνουμε κοινό παράγοντα κατά ομάδες.

7. $x\cdot y=0 \Leftrightarrow x=0\,ή\,y=0$, π.χ.

i. $\alpha\cdot\beta=0\Leftrightarrow\alpha=0\,ή\,\beta=0$

ii. $(\chi-1)\cdot(\chi-2)=0\Leftrightarrow\chi-1=0\quad ή\quad\chi-2=0\Leftrightarrow x=1\quad ή\quad\chi=2$

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) Να αναλύσετε τους παρακάτω αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21.

2) Να αναλύσετε τους παρακάτω αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: 110, 245, 169, 342.

3) Αφού αναλύσετε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων να εφαρμόσετε την επιμεριστική ιδιότητα. Εργαστείτε όπως το παράδειγμα: $16+18=2\cdot2\cdot2\cdot2+2\cdot3\cdot3=2(8+9)$.

i. $4+6$

ii. $4+10$

4) Να βρείτε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών:

i. 4, 6

ii. 4, 10

iii. 16, 18

iv. $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$

5) Αφού βρείτε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη, εργαστείτε όπως το παράδειγμα που ακολουθεί:

$16+18=2\cdot(\frac{16}{2}+\frac{18}{2})=2\cdot(8+9)$

i. $4+6$

ii. $4+10$

iii. $18+16$

iv. $20+21$

v. $\sqrt{2}+\sqrt{8}$

6) Με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να παραγοντοποιήσετε και εν συνεχεία να κάνετε τις πράξεις:

i. $7.32\cdot 25+7.32\cdot 75$

ii. $374\cdot\frac{7}{6}-374\cdot\frac{1}{6}$

iii. $73\cdot 2+73\cdot 8$

iv. $125\cdot 13-125\cdot 3$

7) Με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να αναπτύξετε τις παρακάτω εκφράσεις:

i. $3\cdot(\alpha+\beta+\gamma)$

ii. $2\cdot(x+y)$

iii. $4\cdot(x+3y)$

iv. $(x+y)\cdot 3$

8) Με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω εκφράσεις:

i. $3\alpha+3\beta+3\gamma$

ii. $2x+2y$

iii. $4x+12y$

iv. $3x+3y$

9) Αφού υπολογίσετε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των συντελεστών να διαιρέσετε με σκοπό να γίνει η παραγοντοποίηση. Εργαστείτε όπως το παράδειγμα:

$$4x+12y=4\cdot(\frac{4x}{4}+\frac{12y}{4})=4\cdot(x+3y)$$

i. $2+12x$

ii. $24y+36x$

iii. $8x+10y$

iv. $8x+4y+2z$

10) *(Παράδειγμα 3, σχολικού, σελ 58).* Να υπολογιστούν οι αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής τσέπης:

i. $786\cdot 45+786\cdot 55$

ii. 2005^2-1995^2

iii. $565\cdot 499+565\cdot 66-435^2$

Μάθημα 2

Να κάνετε τις παρακάτω ασκήσεις με την βοήθεια του κοινού παράγοντα.

1) Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενα παραγόντων;

i. $3\cdot 4$

ii. $3\cdot(x+3)$

iii. $(x-3)(x+4)$

iv. $y(x^2+x+1)$

v. $2(x-y)(x+y)$

vi. $3+4$

vii. $3+(x+3)$

viii. $3+(x+3)(x-3)$

ix. $(x+2)(x+2)$

x. $(x+2)^2$

xi. $2+(x+2)^2$

2) Αφού υπολογίσετε τον ΜΚΔ των συντελεστών να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω εκφράσεις, όπως το παράδειγμα:

$$2\alpha+4\beta=2(\frac{2\alpha}{2}+\frac{4\beta}{2})=2(\alpha+2\beta)$$

i. $2x+16$

ii. $2x+2y$

iii. $2x+18y+4$

iv. $\sqrt{2}x+\sqrt{8}y$

iv. $2x+y$

v. $2x+y-3$

vi. $-2x^2+5x-9$

3) *(Ερώτηση 1, σχολικού, σελ 59).* Ποιες από τις επόμενες παραστάσεις είναι γινόμενα παραγόντων;

i. $2(x-y)(x+y)$

ii. $2+(x-y)(x+y)$

iii. $4(x-y)^2$

iv. $4+(\alpha-\beta)^2$

v. $(x+2y)x-y$

vi. $(x+2y)(x-y)$

vii. $(\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)+1$

4) Να παραγοντοποιήσετε με την βοήθεια του κοινού παράγοντα, λαμβάνοντας υπόψιν τους συντελεστές και τις μεταβλητές:

i. $2x+3x$

ii. $3y+4y$

iii. $2x^2+3x$

iv. x^3+x^2

v. $x^2+x^3+x^4$

vi. $2x^2+16x$

vii. $5x^3-15y^{2x}$

viii. $25x-50x^3$

5) Από τις παρακάτω εκφράσεις να βγάλετε κοινό παράγοντα το -1

i. $-1+x$

ii. $-x-2y$

iii. $-2x+y$

6) Από τις παρακάτω εκφράσεις να βγάλετε κοινό παράγοντα το $\sqrt{2}$

i. $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y$

ii. $\sqrt{2}x+\sqrt{8}y$

iii. $\sqrt{18}x+\sqrt{8}y$

7) Από τις παρακάτω εκφράσεις να βγάλετε κοινό παράγοντα το $\frac{1}{2}$.

i. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$

ii. $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y$

iii. $\frac{1}{4}x+\frac{1}{10}y$

8) Να σημειώσετε (Σ) εάν η πρόταση είναι αληθής και (Λ) εάν είναι ψευδής:

i. Το x+1 είναι παράγοντας της έκφρασης: 2x+2

ii. Το x+1 είναι παράγοντας της έκφρασης x+2

9) Μία από τις παρακάτω εκφράσεις έχει κοινό παράγοντα. Να την επιλέξετε.

i. x^2+y^2

ii. x^2+x+1

iii. $ax^2y+\frac{1}{2}y^2$

iv. $z(x-y)+a(\beta-\gamma)$

10) *(Άσκηση 3, σχολικού, σελ 61).* Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. x^2+x

ii. $2y^2-5y$

iii. $\omega(\omega-3)-2(3-\omega)$

iv. $\alpha(3\alpha+1)-4\alpha$

11) Να παραγοντοποιήσετε τις εκφράσεις. Υπόδειξη βρείτε τον ΜΚΔ και χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των δυνάμεων, όπως το παράδειγμα:
$x^a+x^{2a}=x^a\left(\frac{x^a}{x^a}+\frac{x^{2a}}{x^a}\right)=x^a(1+x^a)$.

i. $2x^a+16x^{2a}$

ii. $x^{2a+1}+x^{2a}$

iii. $x^{2a-1}+x^{2a}$

iv. $x^{2a}y^{3a}+x^{3a}y^{2a}$

Μάθημα 3

Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση).

1) Σε ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις το (x+1) είναι κοινός παράγοντας:

i. $2(x+1)+3(x+1)$

ii. $(x+1)^2+(x+1)$

iii. $(x+1)^2+x(x+1)$

iv. $(x+1)^3+(x^3+1^3)$

v. $(x+1)+3(x+1)-5(x+1)$

vi. $3(x+1)^3-2(x+1^2)-2(x+1)$

vii. $(x+1)-2$

viii. $x+1-2$

ix. $x+1-2(x+1)$

x. $-(-x-1)+(x+1)^2$

2) Να βρείτε τον κοινό παράγοντα στις παρακάτω εκφράσεις:

i. $(x+1)^2+(x+1)$

ii. $(x-y)+3x(x-y)$

iii. $(x-a)^2+4x^2y(x-a)^3$

iv. $-(-x+a)+3x^2(x-a)$

3) Να γράψετε τις παρακάτω εκφράσεις με την μορφή παρενθέσεων με ένα (-) μπροστά, όπως το παράδειγμα:
$x^2-x+1=-(-x^2+x-1)$.

i. $x-1$

ii. $2z-4x^3$

iii. $-1+a$

iv. $-x^2+2x-1$

4) Μπορεί μία από τις παρακάτω εκφράσεις να διαφέρει από τις υπόλοιπες. Ποια είναι αυτή;

i. $x-a$

ii. $(x-a)$

iii. $-a+x$

iv. $-(-x+a)$

v. $-(a-x)$

vi. Όλες οι παραπάνω εκφράσεις είναι ταυτόσημες.

5) Να βγάλετε κοινό παράγοντα το x+1:

i. $2(x+1)+(x+1)$

ii. $x(x+1)-y(x+1)$

iii. $4y^2(x+1)^2-(x+1)$

iv. $x+1-(x+1)$

v. $-(-x-1)-(x+1)^2$

vi. $(-x-1)^2+(x+1)$

vii. $(-x-1)^3+(-x-1)^2$

viii. $2x(-x-1)^5+3y(x+1)^4$

6) Να βγάλετε κοινό παράγοντα το x-1:

i. $(x-1)(x^2+4)-2(x-1)-3x(x-1)$

ii. $-(-x+1)x^2-2(x-1)$

iii. $(x-1)^2-3x(1-x)$

iv. $(-x+1)^2+x(x-1)^2$

v. $(-x+1)^3+x(x-1)^3$

7) *(Άσκηση 2, σχολικού, σελ 60).* Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $x(\alpha-\beta)+y(\alpha-\beta)$

ii. $\alpha(x+y)+\beta(x+y)$

iii. $(3x-1)(x-2)-(x+4)(x-2)$

iv. $\alpha^2(\alpha-2)-3(2-\alpha)$

v. $4x(x-1)-x+1$

vi. $2x^2(x-3)-6x(x-3)^2$

8) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $ax+by+bx+ay$

ii. $ax+ay-by-bx$

iii. $ax-bx-ay+by$

9) *(Άσκηση 4, σχολικού, σελ 61).* Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $x^2+xy+\alpha x+\alpha y$

ii. x^3-x^2+x-1

iii. $x^3-5x^2+4x-20$

iv. $2x^3-3x^2+4x-6$

v. $4x^2-8x-\alpha x+2\alpha$

vi. $9\alpha\beta-18\beta^2+10\beta-5\alpha$

vii. $12x^2-8xy-15x+10y$

viii. $x^3+\sqrt{2}x^2+x+\sqrt{2}$

ix. $\sqrt{6}x^2+2\sqrt{2}x-\sqrt{3}x-2$

10) *(Άσκηση 5, σχολικού, σελ 61).* Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $7\alpha^2+10\alpha\beta+3\beta^2$

ii. $5x^2-8xy+3y^2$

iii. $3x^2-xy-2y^2$

11) *(Άσκηση 6, σχολικού, σελ 61).*

i. Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha-\beta$.

ii. Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha+\beta$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

12) *(Άσκηση 7, σχολικού, σελ 61).* Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $2\alpha^2-2\alpha+\alpha\beta-\beta+\alpha x-x$

ii. $2\alpha\beta-4\beta+5\alpha-10+2\alpha\gamma-4\gamma$

13) Να παραγοντοποιήσετε αφού κάνετε πρώτα τις πράξεις στην παρακάτω έκφραση:

$\alpha\beta(x^2+y^2)+xy(\alpha^2+\beta^2)$

14) Να γραφεί με μορφή γινομένου η έκφραση:

$\alpha x^{\nu+1}+\alpha y^{\mu}x+\beta x^{\nu+1}+\beta y^{\mu}x$

Μάθημα 4

Διαφορά τετραγώνου

1) Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω εκφράσεις:

i. x^2-y^2

ii. a^2-x^2

iii. x^2-4

iv. x^2-1

v. $9-x^2$

vi. x^2-4y^2

vii. $1-2x^2$

viii. $x^2-36z^2y^2$

ix. x^4-y^4

x. x^4-1

xi. x^8-64

2) Να πραγματοποιήσετε τις παρακάτω εκφράσεις:

i. $(x+y)^2-x^2$

ii. $(x+y)^2-1$

iii. $1-(\alpha-\beta)^2$

iv. $(\alpha^2+2\beta)^2-\beta^2$

v. $\alpha^2-(\beta-\alpha)^2$

vi. $(2\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2$

vii. $\chi^2-(\chi+\psi)^2$

viii. $4\chi^2-(\chi-3\psi)^2$

3) Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω εκφράσεις:

i. $\alpha\beta^2-\alpha\gamma^2$

ii. $\chi^4-4\chi^2\psi^2$

iii. $\chi^3-\chi(\psi-\zeta)^2$

iv. $\alpha\chi^3-\alpha^3\chi(\psi+\zeta)^2$

4) Να γραφούν ως γινόμενο οι παραστάσεις:

i. $\alpha\chi^2+\beta\chi^2-\alpha\psi^2-\beta\psi^2$

ii. $12\chi-20\psi+5\alpha^2\psi-3\alpha^2\chi$

iii. $9\alpha^2\chi^2-4\alpha^2-9\beta^2\chi^2+4\beta^2$

iv. $\chi^3-\chi^2\psi-\chi\psi^2+\psi^3$

5) Να κάνετε τις πράξεις:

i. 29^2-21^2

ii. 51^2-49^2

6) Να παραγοντοποιήσετε:

i. $x^{2a}-y^{2a}$

ii. $x^{2\nu+1}-xy^2$

7) Αφού διασπάσετε να παραγοντοποιήσετε:

i. $-\chi^3+2\chi^2-1$

ii. $\chi^3-3\chi+2$

8) *(Άσκηση 8, σχολικού, σελ 61).* Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. x^2-9

ii. $16x^2-1$

iii. $\alpha^2-9\beta^2$

iv. $\alpha^2\beta^2-4$

v. $36\omega^2-(\omega+5)^2$

vi. $4(x+1)^2-9(x-2)^2$

vii. $x^2-\frac{1}{16}$

viii. x^2-3

ix. x^2-2y

9) *(Άσκηση 9, σχολικού, σελ 61).* Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $2x^2-32$

ii. $28-7y^2$

iii. $2x^3-2x$

iv. $5\alpha x^2-80\alpha$

v. $2(x-1)^2-8$

10) *(Άσκηση 10, σχολικού, σελ 61).* Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογίσετε την πλευρά γ, όταν:

i. α = 53, β = 28

ii. α = 0.37, β = 0.12

iii. α = 26λ, β = 10λ

11) *(Άσκηση 11, σχολικού, σελ 61).* Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2-49=0$

ii. $9x^3-4x=0$

iii. $x(x+1)^2=4x$

iv. $(x+2)^3=x+2$

12) Αν για τους αριθμούς x και y ισχύει ότι $x\cdot y=0$ τότε τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για τα x και y;

Μάθημα 5

Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε τα τέλεια τετράγωνα και με προχωρημένες ασκήσεις παραγοντοποίησης.

1) Να κάνετε τις ταυτότητες:

i. $(\chi+\psi)^2$

ii. $(\chi-\zeta)^2$

iii. $(2\xi+3\zeta)^2$

iv. $(2\xi-1)^2$

2) Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι τέλεια τετράγωνα;

i. $x^2+2xy+y^2$

ii. $4x^2+2xy+y^2$

iii. $\psi^2-8\psi+16$

iv. $x^2-10x+25$

v. $(\chi+\psi)^2+2(\chi+\psi)+1$

vi. $9\chi^{2\lambda}-30\chi^{\lambda}+25$

vii. $x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y$

viii. $x^2+2\sqrt{2}x+2$

ix. $x^4-2x^2y^2+y^4$

3) *(Άσκηση 15, σχολικού, σελ 62).* Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. x^2-2x+1

ii. y^2+4y+4

iii. $\omega^2-6\omega+9$

iv. $\alpha^2+10\alpha+25$

v. $1-4\beta+4\beta^2$

vi. $9x^4+6x^2+1$

vii. $4y^2-12y+9$

viii. $16x^2+8xy+y^2$

ix. $25\alpha^2-10\alpha\beta+\beta^2$

x. $(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)+1$

xi. $\frac{y^2}{9}-2y+9$

xii. $x^2+x+\frac{1}{4}$

4) *(Άσκηση 16, σχολικού, σελ 61).* Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

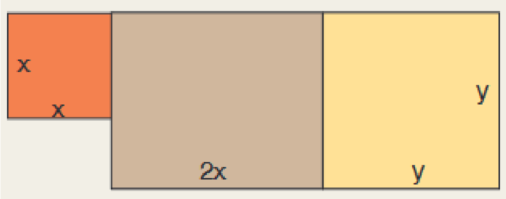
i. $3x^2+24x+48$

ii. $-y^2+4y-4$

iii. $2\alpha^2-8\alpha\beta+8\beta^2$

iv. $4\alpha^3+12\alpha^2+9\alpha$

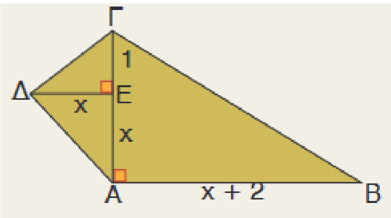
5) *(Άσκηση 17, σχολικού, σελ 62).* Να βρείτε:



i. Ένα πολυώνυμο που να εκφράζει το εμβαδόν του παραπάνω σχήματος.

ii. Την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του παραπάνω σχήματος.

6) *(Άσκηση 18, σχολικού, σελ 62).* Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου, που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



7) *(Άσκηση 22, σχολικού, σελ 62).* Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης.

i. $1453 \cdot 1821 - 1453 \cdot 821$

ii. $8012 + 199 \cdot 801$

iii. $9982 - 4$

iv. $999 \cdot 1001 + 1$

v. $9992 + 2 \cdot 999 + 1$

vi. $972 + 6 \cdot 97 + 9$

8) *(Άσκηση 23, σχολικού, σελ 62).* Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\chi^2\psi^2 - 4\psi^2 - \chi^2 + 4$

ii. $x^4 - 1 + x^3 - x$

iii. $x^3(x^2-1) + 1 - x^2$

iv. $(x^2+9)^2 - 36x^2$

v. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta$

vi. $x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2$

vii. $1 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2$

viii. $y^2 - x^2 - 10y + 25$

ix. $2(x-1)(x^2-4) - 5(x-1)(x-2)^2$

x. $(y^2-4)^2 - (y+2)^2$

xi. $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$

xii. $(x^2+9)(\alpha^2+4) - (\alpha x+6)^2$

9) Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $3^x + 3^{2x}$

ii. $e^{3x} + e^{2x} + e^x$, e σταθερός αριθμός.

iii. $\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 - 1$

iv. $4(\alpha+\beta)^2 - 9(\alpha-\beta)^2$

v. $(\alpha^2+1)(\chi^2+4) - (\alpha\chi+2)^2$, να κάνετε πρώτα τις πράξεις

10) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$

ii. $\sqrt{\chi^4 + 2\chi^3\psi + \chi^2\psi^2}$, να κάνετε κοινό παράγοντα.

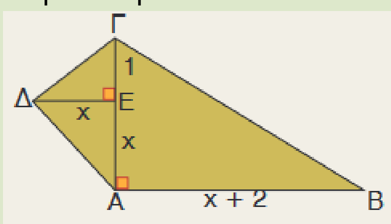
Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Ποιες από τις επόμενες παραστάσεις είναι γινόμενα παραγόντων;
   i. $2(x-y)(x+y)$
   ii. $2+(x-y)(x+y)$
   iii. $4(x-y)^2$
   iv. $4+(\alpha-\beta)^2$
   v. $(x+2y)x-y$
   vi. $(x+2y)(x-y)$
   vii. $(\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)+1$
2) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
   i. x^2+x
   ii. $2y^2-5y$
   iii. $\omega(\omega-3)-2(3-\omega)$
   iv. $\alpha(3\alpha+1)-4\alpha$
3) Να γράψετε τις παρακάτω εκφράσεις με την μορφή παρενθέσεων με ένα (-) μπροστά, όπως το παράδειγμα: $x^2-x+1=-(-x^2+x-1)$.
   i. $x-1$
   ii. $2z-4x^3$
   iii. $-1+a$
   iv. $-x^2+2x-1$
4) Να βγάλετε κοινό παράγοντα το x+1:
   i. $2(x+1)+(x+1)$
   ii. $x(x+1)-y(x+1)$
   iii. $4y^2(x+1)^2-(x+1)$
   iv. $x+1-(x+1)$
   v. $-(-x-1)-(x+1)^2$
   vi. $(-x-1)^2+(x+1)$
   vii. $(-x-1)^3+(-x-1)^2$

Κριτήριο 2

1) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
   i. x^2-9
   ii. $16x^2-1$
   iii. $\alpha^2-9\beta^2$
   iv. $\alpha^2\beta^2-4$
   v. $36\omega^2-(\omega+5)^2$
   vi. $4(x+1)^2-9(x-2)^2$
   vii. $x^2-\frac{1}{16}$
   viii. x^2-3
   ix. x^2-2y
2) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
   i. $2\alpha^2-2\alpha+\alpha\beta-\beta+\alpha x-x$
   ii. $2\alpha\beta-4\beta+5\alpha-10+2\alpha\gamma-4\gamma$
3) Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου, που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



4) Αν για τους αριθμούς x και y ισχύει ότι $x\cdot y=0$ τότε τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για τα x και y;

[1.9] Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

Θεωρία

1. Από το σχολικό βιβλίο της Α Γυμνασίου διαβάζουμε: Το σύμβολο $\frac{1}{\nu}$ (ν φυσικός, $\neq 0$) που εκφράζει το ένα από τα ν ίσα μέρη, στα οποία χωρίζεται μία ποσότητα, ονομάζεται **κλασματική μονάδα**. **Κλάσμα** ή **κλασματικός αριθμός** ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{\kappa}{\nu}$ όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$. Το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ εκφράζει τα κ μέρη από τα ν ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί μία ποσότητα. Γενικά: $\frac{\kappa}{\nu}=\kappa \cdot \frac{1}{\nu}$, όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$. Κάθε κλάσμα παριστάνει και το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή διά του παρονομαστή. Γενικά ισχύει $\frac{\kappa}{\nu}=\kappa : \nu$ όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$. Κάθε φυσικός αριθμός κ μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1, γιατί $\kappa=\kappa : 1=\frac{\kappa}{1}$. Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.

2. Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται **ισοδύναμα** ή **ίσα** όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι και ίσα και γράφουμε: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα “χιαστί γινόμενα” $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα και αντιστρόφως. Δηλαδή: αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta=\beta \cdot \gamma$ και αντιστρόφως. Για να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα ή για να διαπιστώσουμε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, μπορούμε να εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες:

   i. Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.

   ii. Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο. Η διαδικασία αυτή λέγεται **απλοποίηση** του κλάσματος και έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό με μικρότερους όρους.

   Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει άλλος κοινός διαιρέτης του αριθμητή και του παρονομαστή εκτός από τη μονάδα) λέγεται **ανάγωγο**.

   Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα** και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται **ετερώνυμα**.

3. Γενικά, για τη σύγκριση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

i. Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.

ii. Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους.

iii. Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή

4. Μια αλγεβρική παράσταση (π.χ. $\frac{x^3+4}{x-1}$, $\frac{xy\omega}{x+y}$, $\frac{2}{x^2+4}$) που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς ρητή παράσταση. Για τις ρητές παραστάσεις ισχύουν ότι και στα κλάσματα φυσικών αριθμών.

   i. **Ο παρανομαστής δεν μπορεί να είναι μηδέν**, επομένως οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρανομαστή της. Για να βρούμε αυτές τις τιμές πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τον παρανομαστή.

   ii. Για να **απλοποιήσουμε** μια ρητή παράσταση μπορούμε, να α) παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή, β) να διαγράψουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.

   iii. Εναλλακτικά, για να **απλοποιήσουμε** μία ρητή παράσταση διαιρούμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον ΜΚΔ του αριθμητή και του παρανομαστή. Για να προχωρήσουμε με αυτή την διαδικασία πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τους όρους του κλάσματος.

Ασκήσεις

Μάθημα 1

1) Ποιες από τις παρακάτω ποσότητες είναι κλάσματα ή μπορούν να γραφούν με την μορφή κλάσματος

   i. 5

   ii. $\frac{3}{4}$

   iii. -5

   iv. 3.14

   v. π , e

   vi. $3.\overline{14}$

   vii. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

   viii. $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$

2) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη είναι ισοδύναμα κλάσματα:

   i. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$

   ii. $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$

3) Αφού υπολογίστε τον ΜΚΔ των αριθμητών και των παρανομαστών να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ανάγωγα.

i. $\frac{4}{16}$

ii. $\frac{25}{5}$

iii. $\frac{125}{75}$

iv. $\frac{1233}{45}$

4) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $4\cdot\frac{3}{5}$

ii. $\frac{3}{5}\cdot 4$

iii. $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$

iv. $\frac{2}{5}:\frac{4}{7}$

v. $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}}$

5) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$

ii. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

iii. $\frac{2}{3}\cdot(-4)-(\frac{3}{4})^2$

iv. $\frac{2}{3}+1$

6) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(\frac{2}{5})^2-2(\frac{2}{3}^{-2})^{-1}$

ii. $\left|-(\frac{2}{3})^2+\frac{3}{2}\right|^{-2}-1$

7) Να κάνετε τις πράξεις:

$$A=\frac{-1+\frac{1}{2}}{4-\frac{2}{3}}-\frac{(\frac{1}{3}-1):(-2)}{(\frac{1}{5}+2):(-5)}-(-4):\frac{1}{5}$$

8) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{2^{-3}+(\frac{3}{4})^{-4}\cdot(\frac{-1}{2})^2}{(\frac{1}{6})^0-12\cdot 3^{-3}}$$

9) Αφού μετατρέψετε τις δυνάμεις στην ίδια βάση να εφαρμόσετε τις ιδιότητες ώστε να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη.

i. $\left[(-\frac{1}{2})^{-2}\right]^{-4}:\left[(-\frac{1}{2})^5\right]^{-4}$

ii. $\frac{[-3^{-2}]^3[(-9)^{-2}]}{(-9)^3(-3)^2}$

Μάθημα 2

1) *(Παράδειγμα 1, σχολικού, σελ 72).* Να βρείτε για ποιες τιμές των μεταβλητών ορίζονται οι παραστάσεις:

i. $\frac{x^2+7x+2}{x}$

ii. $\frac{x^2+6}{x+2}$

iii. $\frac{x^2+y^2}{x-y}$

2) *(Παράδειγμα 2, σχολικού, σελ 72).* Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

i. $\frac{12x^3y\omega}{8xy^3}$

ii. $\frac{3x^2-3}{6x^2-6x}$

iii. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3-y^3}$

3) *(Άσκηση 1, σχολικού, σελ 74).* Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

i. $\dfrac{1}{x-4}$

ii. $\dfrac{y+3}{2y-5}$

iii. $\dfrac{\omega-2}{(\omega+1)^2}$

iv. $\dfrac{6x+1}{x(x-3)}$

4) *(Άσκηση 2, σχολικού, σελ 74).* Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\dfrac{4x}{6x}$

ii. $\dfrac{3y^2}{12y}$

iii. $\dfrac{2x\omega^2}{8x^{2\omega}}$

iv. $\dfrac{5\alpha^2\beta\gamma^3}{10\alpha\beta^2\gamma}$

v. $\dfrac{x+4}{4+x}$

vi. $\dfrac{y-1}{1-y}$

vii. $\dfrac{\omega-2}{(2-\omega)^2}$

viii. $\dfrac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}$

5) *(Άσκηση 3, σχολικού, σελ 74).* Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\dfrac{6x}{2x^2+4x}$

ii. $\dfrac{3y-9}{y^2-3y}$

iii. $\dfrac{x^2+x\omega}{\omega^2+x\omega}$

iv. $\dfrac{5\alpha^2-20}{(\alpha-2)^2}$

v. $\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$

vi. $\dfrac{y^2-1}{y^2+2y+1}$

vii. $\dfrac{6x^2+3x\omega}{4x^2-\omega^2}$

viii. $\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}$

6) *(Άσκηση 4, σχολικού, σελ 74).* Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}$

ii. $\dfrac{y^2-5y+4}{y^2-6y+8}$

iii. $\dfrac{\omega^3-2\omega^2+\omega}{\omega^3-\omega}$

7) *(Άσκηση 5, σχολικού, σελ 74).* Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\dfrac{x(x-1)+4(x-1)}{x^2+2x-3}$

ii. $\dfrac{y(y-3)+y^2-9}{4y^2-9}$

iii. $\dfrac{(2\omega+1)^2-(\omega+2)^2}{\omega^4-1}$

iv. $\dfrac{(\alpha+1)(\alpha-2)^2-4(\alpha+1)}{\alpha^3+\alpha^2}$

8) *(Άσκηση 6, σχολικού, σελ 74).* Ένας λαμπαδηδρόμος κατά τα τελευταία μέτρα της διαδρομής του διήνυσε την απόσταση ΑΒ με σταθερή ταχύτητα $5m/sec$.

Φτάνοντας στο σημείο Β ένας άλλος λαμπαδηδρόμος ξεκινώντας από το σημείο Β διήνυσε την απόσταση ΒΓ με σταθερή επιτάχυνση $4\,m/sec^2$. Αν ο χρόνος που κινήθηκε κάθε αθλητής ήταν $t\,sec$ να αποδείξετε ότι η μέση ταχύτητα με την οποία διανύθηκε η απόσταση ΑΓ ήταν $\left(t+\frac{5}{2}\right)\quad m/sec$

Μάθημα 3

1) Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

i. $\frac{1}{2x-1}$

ii. $\frac{4}{4x-12}$

iii. $-\frac{5x}{y-3}$

iv. $\frac{3}{x}$

v. $\frac{x}{3}$

vi. $\frac{1}{x^2-1}$

vii. $\frac{1}{x^2+1}$

2) Για $x\cdot y\cdot z\neq 0$ και $x, z\neq 1$ να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\frac{12x^2y}{6x^3y}$

ii. $\frac{6xyz^3}{z}$

iii. $\frac{xyz^3}{xy(x-1)}$

iv. $\frac{12(x+y)x}{xy(z-1)}$

3) Για κατάλληλες τιμές των μεταβλητών ώστε να ορίζονται τα κλάσματα να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\frac{2(x-2)}{4(x-2)}$

ii. $\frac{12(x-1)}{6(1-x)}$

iii. $\frac{-2-x}{x+1}$

iv. $\frac{12x}{2x^2+4x}$

4) Για κατάλληλες τιμές των μεταβλητών ώστε να ορίζονται τα κλάσματα να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\frac{12(x+y)^2}{6(x+y)}$

ii. $\frac{12(x+y)}{6(x+y)^2}$

iii. $\frac{(x-y)^2}{(y-x)}$

iv. $\frac{(y-x)^3}{(x-y)}$

5) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ $\frac{1}{x^2+4x+4}$ και ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ΒΓ ίσο με $2(x+2)$. Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις $\frac{1}{x^2-4}$ και x^2+4x+4. Να βρείτε τον λόγο των εμβαδών τους $\frac{E_{τριγ}}{E_{ορθ}}$.

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη είναι ισοδύναμα κλάσματα:

   i. $\frac{1}{2}, \frac{3}{6}$

   ii. $\frac{4}{5}, \frac{8}{9}$

2) Να κάνετε τις πράξεις:

$$A=\frac{-1+\frac{1}{2}}{4-\frac{2}{3}}-\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right):(-2)}{\left(\frac{1}{5}+2\right):(-5)}-(-4):\frac{1}{5}$$

3) Να βρείτε για ποιες τιμές των μεταβλητών ορίζονται οι παραστάσεις:

   i. $\frac{x^2+7x+2}{x}$

   ii. $\frac{x^2+6}{x+2}$

   iii. $\frac{x^2+y^2}{x-y}$

4) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

   i. $\frac{12x^3y\omega}{8xy^3}$

   ii. $\frac{3x^2-3}{6x^2-6x}$

   iii. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3-y^3}$

[1.10] Πράξεις ρητών παραστάσεων

Θεωρία

1. Γενικά, για την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση** κλασμάτων ισχύουν τα εξής:
   i. Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή. $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$
   ii. Προσθέτουμε ετερώνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.
   iii. Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή. $\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$
   iv. Αφαιρούμε δύο ετερώνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα.
   v. Ισχύουν όλες οι ιδιότητες της πρόσθεσης των φυσικών στα κλάσματα.
   vi. Μερικές φορές αντί να γράφουμε $1+\frac{4}{5}$, γράφουμε πιο απλά $1\frac{4}{5}$. Ο συμβολισμός αυτός, που παριστάνει το άθροισμα ενός ακέραιου με ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται **μεικτός αριθμός**
2. Σχετικά με τον **πολλαπλασιασμό** των κλασμάτων διατυπώνουμε τα εξής:
   i. Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών. $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$
   ii. Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί ένα κλάσμα είναι το κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό και με τον ίδιο παρονομαστή. $\lambda\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lambda=\frac{\alpha\cdot\lambda}{\beta}$.
   iii. Δύο κλάσματα λέγονται **αντίστροφα** όταν έχουν γινόμενο 1. Επειδή $\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=1$ τα κλάσματα $\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\gamma}$ είναι αντίστροφα. Ισχύουν όλες οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών στα κλάσματα.
3. Σχετικά με την **διαίρεση** των κλασμάτων διατυπώνουμε τα εξής:
   i. Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. $\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$

iii. Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται σύνθετο κλάσμα. Για να μετατρέψουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό έχουμε: $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$.

Ασκήσεις

Μάθημα 1

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση.

1) *(Άσκηση 1, σχολικού, σελ 77).* Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

i. $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{y}$

ii. $\frac{9x}{4y}\cdot\frac{1}{3x}$

iii. $12x^2\cdot\frac{1}{9x}$

iv. $\frac{2\alpha^3}{3\beta^2}\cdot\frac{6\beta}{4\alpha^2}$

v. $(-5\omega^2)\cdot\frac{3}{10\omega}$

vi. $(-\frac{3\alpha\beta}{2\beta})\cdot(-\frac{4}{\alpha^2})$

2) *(Άσκηση 2, σχολικού, σελ 77).* Να κάνετε τις διαιρέσεις:

i. $8x:\frac{6}{x}$

ii. $\frac{1}{y^2}:(-\frac{3}{y})$

iii. $(-\frac{\alpha^2}{\beta^3}):3\alpha^2$

iv. $(-\frac{x^3}{2\omega}):(-\frac{x^2}{4\omega^2})$

3) *(Άσκηση 3, σχολικού, σελ 77).* Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

i. $\frac{2x+6}{x^2}\cdot\frac{4x}{x+3}$

ii. $\frac{y-5}{y+2}\cdot\frac{2+y}{5-y}$

iii. $\frac{x-\omega}{x^2\omega^3}\cdot\frac{x^3\omega^2}{x^2-\omega^2}$

iv. $\frac{\alpha^2-4}{\alpha^2+\alpha-6}\cdot\frac{\alpha+3}{\alpha^2+2\alpha}$

v. $\frac{x^2+x}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$

vi. $\frac{4y^2-9}{4y^2-12y+9}\cdot\frac{y^2+3y}{2y^2+3y}$

4) *(Άσκηση 4, σχολικού, σελ 77).* Να κάνετε τις διαιρέσεις:

i. $\frac{x+4}{5}:\frac{x+4}{15}$

ii. $\frac{2y-1}{y+1}:\frac{1-2y}{1+y}$

iii. $(-\frac{\omega+2}{\omega}):(\omega+2)$

iv. $\frac{\alpha+1}{\beta^2}:\frac{(\alpha+1)^2}{\beta}$

v. $\frac{x+y}{x^2-xy}:\frac{x^2+xy}{x-y}$

vi. $\frac{x^2-4}{x^3+8}:\frac{x-2}{x^2-2x+4}$

5) *(Άσκηση 5, σχολικού, σελ 77).* Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $(\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{4x+4}{x+2}):\frac{8x-8}{x+2}$

ii. $\frac{x+2}{x-1}:(\frac{2x+6}{x-1}\cdot\frac{x+2}{x+3})$

iii. $(\frac{x+2}{x-1}:\frac{2x+6}{x-1})\cdot\frac{x+2}{x+3}$

Μάθημα 2

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση.

1) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2x^2\cdot\frac{3}{x^3}$

ii. $x^4\cdot\frac{3x^5}{x^6}\cdot\frac{12x^2}{3x^3}$

iii. $\frac{36x^2y^3}{12x^3y}\cdot 2x^5y$

iv. $\frac{2x^2y^3z}{4x^4y^2z^3}\cdot\frac{8xy^2z}{4xyz^3}\cdot\frac{24x^3y^2z^2}{8x^3yz}$

2) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{3x+6}{x^2}\cdot\frac{5x}{x+3}$

ii. $\frac{5y-15}{y^2}\cdot\frac{2y}{y-3}$

iii. $\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2-2xy+y^2}{zx-zy}$

iv. $\frac{5-x}{x+5}\cdot\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}$

3) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{x+1}{y}:\frac{(x+1)^2}{y}$

ii. $\frac{(x-5)^3}{x^2}:\frac{(x-5)^4}{x^5}$

iii. $\frac{(x+y)}{x^2-xy}:\frac{3x+3y}{x-y}$

iv. $\frac{(x-1)}{x^2-3x}:\frac{1}{x^3-9x}$

4) Δίνεται η παράσταση $f(x)=2x^2+x$. Να βρεθεί το κλάσμα $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(h)}$

5) Αφού βρείτε τις τιμές για τις οποίες ορίζεται η παράσταση: $\frac{1}{a}\cdot\frac{a^2-a}{a-a^2}:(a+1)$ στην συνέχεια να την απλοποιήσετε.

6) Να βρείτε τις τιμές για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

i. $\frac{a^3-1}{a^2-1}\cdot\frac{a}{b}$

ii. $\frac{1}{xy}$

iii. $\frac{x}{x^2y+xy^2}$

iv. $\frac{ab}{x-c}:\frac{x+c}{a}$

Μάθημα 3

Πρόσθεση και αφαίρεση.

1) Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παραστάσεων

i. $2\alpha^2$, $\alpha^3\beta$

ii. $4x^2y$, $12xy^3$

iii. $7x(x-1)^2$, $21x^2(x-1)^3$

iv. x^2y+xy^2 , x^2+xy

v. $(x-1)^2$, x^3-1

2) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $1+\dfrac{\alpha}{\beta}$

ii. $\dfrac{\alpha}{\beta}-1$

iii. $\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}$

iv. $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

v. $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}$

vi. $\dfrac{\alpha+\beta}{x}+\dfrac{\alpha-\beta}{y}$

3) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\dfrac{5}{4x-8}-\dfrac{3}{x-2}$

ii. $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}-1$

iii. $4+\dfrac{(x-y)^2}{xy}$

iv. $\dfrac{x^2-y^2}{2y}+x+y$

v. $\dfrac{(x-y)}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}$

vi. $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}$

4) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$

ii. $\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{12}{2x-4}+\dfrac{9}{3x-6}$

iii. $\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x+1}{x+3}+1$

iv. $\dfrac{5}{x^3-x}+\dfrac{4}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2}$

5) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}$

ii. $\dfrac{\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$

iii. $\dfrac{\dfrac{3}{4}-x}{\dfrac{3}{4}+x}$

iv. $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2}{x}}{\dfrac{x-y}{x}}$

6) Να απλοποιήστε το κλάσμα:

$$\frac{\dfrac{3}{x+2y}-\dfrac{2y}{x^2+2xy}}{\dfrac{3y}{x^2+2xy}+\dfrac{5}{x}}$$

7) Να απλοποιήστε το κλάσμα:

$$\frac{\dfrac{2x}{x-x^{-1}}-x^{-1}}{2x+\dfrac{2x}{1-x^{-1}}}$$

8) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y}\right):\left[\frac{y}{x-y}+\frac{y^2}{(x-y)^2}\right]$$

9) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right):\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)+\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right):\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$$

10) Να βρείτε το κλάσμα $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

όταν $f(x)=-\frac{1}{x}$

Μάθημα 4

Πρόσθεση και αφαίρεση

1) *(Άσκηση 1, σχολικού, σελ 80).* Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

ii. $\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x}$

iii. $\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}$

iv. $\frac{1}{\omega^2}-\frac{2}{\omega^2+1}$

2) *(Άσκηση 2, σχολικού, σελ 80).* Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\frac{2x}{2x-6}-\frac{3}{x-3}$

ii. $\frac{y-6}{y^2+2y}-\frac{4}{y+2}$

iii. $\frac{3\omega+6}{\omega^2-4}-\frac{4}{2\omega-4}$

iv. $\frac{1}{2x+12}+\frac{x}{36-x^2}$

v. $\frac{9x}{x^2-x\omega}+\frac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$

vi. $\frac{\alpha+7}{\alpha^2+4\alpha+3}-\frac{3}{\alpha+1}$

3) *(Άσκηση 3, σχολικού, σελ 80).* Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

i. $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

ii. $\dfrac{y-2+\frac{1}{y}}{y-1\frac{1}{y}}$

iii. $\dfrac{\omega+1+\frac{1}{\omega}}{1-\frac{1}{\omega^3}}$

iv. $\dfrac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}}$

4) *(Άσκηση 4, σχολικού, σελ 81).* Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x^2-2x}$

ii. $\frac{3}{x+2y}-\frac{2}{x-2y}+\frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$

iii. $\frac{y^2-6}{y^2-5y+6}-\frac{2}{y-2}+\frac{3}{y-3}$

iv. $\frac{x^2}{x-y}+\frac{y^2}{x+y}-\frac{2xy^2}{x^2-y^2}$

5) *(Άσκηση 5, σχολικού, σελ 81).* Να υπολογίστε τις παραστάσεις:

i. $\left(\frac{x+3}{2x+1}-\frac{x}{2x-1}\right)\left(1+\frac{1}{4x-3}\right)$

ii. $\left[\frac{x+3}{x^2-1}+\frac{x-3}{(x-1)^2}\right]:\frac{x^2-3}{(x-1)^2}$

iii. $\left(1-\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)$

iv. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}-1\right):\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)$

6) *(Άσκηση 6, σχολικού, σελ 81).*

i. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}+xy=(x+y)^2$

ii. Να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{56^3-44^3}{12}+56\cdot 44$

7) *(Άσκηση 7, σχολικού, σελ 81).*

i. Αν $A=\dfrac{2x}{x^2+1}$ και $B=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, να αποδείξετε ότι $A^2+B^2=1$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί 1, $\dfrac{200}{10001}$, $\dfrac{9999}{10001}$ αποτελούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

Μάθημα 5

1) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$

ii. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)$

iii. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{x+3}\right)$

iv. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{x+3}\right)\left(1-\dfrac{1}{x+4}\right)$

v. Τι παρατηρείτε;

vi. Μπορείτε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\left(1-\frac{1}{x+2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x+3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{x+99}\right)\left(1-\frac{1}{x+100}\right)$$

2) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{x}+\frac{4}{x+1}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{x}-\frac{5}{4(x-1)}\right)$$

3) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{1}{6x-2}-\frac{1}{2\left(x-\frac{1}{3}\right)}-\frac{1}{1-3x}$$

4) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(1-ax)^2}:\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

5) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{-1}\left[(2x)^{-1}+\left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right]$$

Κριτήρια

Κριτήριο 1

1) Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

i. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x}{y}$

ii. $\frac{9x}{4y}\cdot\frac{1}{3x}$

iii. $12x^2\cdot\frac{1}{9x}$

iv. $\frac{2\alpha^3}{3\beta^2}\cdot\frac{6\beta}{4\alpha^2}$

v. $(-5\omega^2)\cdot\frac{3}{10\omega}$

vi. $(-\frac{3\alpha\beta}{2\beta})\cdot(-\frac{4}{\alpha^2})$

2) Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

i. $\frac{2x+6}{x^2}\cdot\frac{4x}{x+3}$

ii. $\frac{y-5}{y+2}\cdot\frac{2+y}{5-y}$

iii. $\frac{x-\omega}{x^2\omega^3}\cdot\frac{x^3\omega^2}{x^2-\omega^2}$

iv. $\frac{\alpha^2-4}{\alpha^2+\alpha-6}\cdot\frac{\alpha+3}{\alpha^2+2\alpha}$

v. $\frac{x^2+x}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$

vi. $\frac{4y^2-9}{4y^2-12y+9}\cdot\frac{y^2+3y}{2y^2+3y}$

3) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{x+1}{y}:\frac{(x+1)^2}{y}$

ii. $\frac{(x-5)^3}{x^2}:\frac{(x-5)^4}{x^5}$

iii. $\frac{(x+y)}{x^2-xy}:\frac{3x+3y}{x-y}$

iv. $\frac{(x-1)}{x^2-3x}:\frac{1}{x^3-9x}$

4) Αφού βρείτε τις τιμές για τις οποίες ορίζεται η παράσταση: $\frac{1}{a}\cdot\frac{a^2-a}{a-a^2}:(a+1)$ στην συνέχεια να την απλοποιήσετε.

Κριτήριο 2

1) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $1+\frac{\alpha}{\beta}$

ii. $\frac{\alpha}{\beta}-1$

iii. $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$

iv. $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

v. $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}$

vi. $\frac{\alpha+\beta}{x}+\frac{\alpha-\beta}{y}$

2) Να απλοποιήστε το κλάσμα:

$$\frac{\frac{3}{x+2y}-\frac{2y}{x^2+2xy}}{\frac{3y}{x^2+2xy}+\frac{5}{x}}$$

3) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{-1}\left[(2x)^{-1}+\left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right]$$

4) Να βρείτε το κλάσμα $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ όταν $f(x)=-\frac{1}{x}$

Γενικές ασκήσεις

1) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\alpha^3-(1+\alpha)^{-2}+4\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}-2004\right)^{2004}\right]^0$$

αν είναι $\alpha=-\frac{3}{2}$ και $\beta=3$

2) Για θετικό ακέραιο ν
   i. ποιοι είναι οι αριθμοί 2ν+1
   ii. ποιοι είναι οι αριθμοί 2ν

3) Να υπολογίστε:
   i. $(-1)^1$, $(-1)^3$, $(-1)^5$, …, $(-1)^{2\nu+1}$
   ii. $(-1)^2$, $(-1)^4$, $(-1)^6$, …, $(-1)^{2\nu}$

4) Για κάθε θετικό ακέραιο ν να αποδείξετε ότι:
   i. $(\alpha-\beta+3\gamma)^{2\nu+1}+(\beta-\alpha-3\gamma)^{2\nu+1}=0$
   ii. $(x-y-\omega)^{2\nu}-(y+\omega-x)^{2\nu}=0$

5) Αν ισχύει $\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων. Υπόδειξη: διαιρέστε και τους δύο όρους του κλάσματος με την κατάλληλη δύναμη του y, π.χ. y, y^2, y^3, ….
   i. $\frac{4x^2-6xy+y^2}{x^2+y^2}$
   ii. $\frac{2x^3-2xy^2+3y^3}{x^2y+y^3}$

6) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=-2x^2+2x+800$.
   i. Να αποδείξετε ότι $P(1-x)=P(x)$
   ii. Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές P(100) και P(-99)
   iii. Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές P(1) και P(0)

7) Να αποδείξετε την ταυτότητα του Euler:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

   i. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$
   ii. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $(x-y)^3+(y-\omega)^3+(\omega-x)^3$

8) Αν $\alpha+\beta=-\frac{1}{3}$ και $\alpha\beta=-\frac{7}{3}$, τότε να αποδείξετε ότι:
   i. $\alpha^2+\beta^2=\frac{43}{9}$
   ii. $(3\alpha+1)^2+(3\beta+1)^2+9(\alpha+\beta)=40$

9) Αν για τους αριθμούς x, y ισχύει μια από τις παρακάτω ισότητες να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ίσοι ή αντίθετοι.
   i. $x^4-2y^2=x^2(y^2-2)$, Υπ. Κάνετε τις πράξεις και χωρίστε σε διαφορετικές ομάδες.
   ii. $x^3+y^3=x^2y+xy^2$

10) Δίνονται οι παραστάσεις $A=x(x+3)$ και $B=(x+1)(x+2)$.
   i. Να αποδείξετε ότι $B=A+2$ και $AB+1=(A+1)2$.
   ii. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

11) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{(x-1)x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$

Στην προηγούμενη ισότητα να αντικαταστήσετε το x διαδοχικά με τις τιμές 2, 3, 4,..., 2008 και να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2007\cdot 2008}=\frac{2007}{2008}$$