Σημειώσεις Φυσικής Α' Λυκείου

Λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου
Θεωρία σε σύντομη μορφή

ΚΟΥΜΟΥΝΔΟΥΡΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ, Φυσικός

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη

«Όταν παίρνει κάποιος μία ιδέα από εμένα, μαθαίνει κάτι χωρίς να μειώνει την δική μου γνώση· όπως όταν ανάβει κάποιος το κερί του από το δικό μου, παίρνει φως χωρίς να αφήνει εμένα στο σκοτάδι.»

ΤΟΜΑΣ ΤΖΕΦΕΡΣΟΝ

Οδηγίες

Οι σημειώσεις αυτές προορίζονται για τους μαθητές της Α' Λυκείου. Αποτελούνται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, θα βρείτε την σχετική θεωρία σε σύντομη μορφή για την επίλυση των ασκήσεων που ακολουθούν στο δεύτερο μέρος. Σε ειδικά ένθετα με διαφορετικό χρώμα σε όλες τις σελίδες θα βρείτε χρήσιμα κομμάτια της θεωρίας. Οι σημειώσεις αυτές είναι προϊόν πολυετούς διδακτικής εμπειρίας.

Στο ιστολόγιο **koumoundouros.neocities.org** θα βρείτε χρήσιμες σημειώσεις για τα σχολικά μαθήματα και τις Πανελλαδικές εξετάσεις καθώς και εκλαϊκευμένα άρθρα σχετικά με τις φυσικές επιστήμες.

Φιλικά, **Κουμουνδούρος Γιάννης, Φυσικός, Σπάρτη 15 Μαΐου 2024**

Πολύ σύντομη Θεωρία

Φανταστείτε ότι βρίσκεστε πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο που στην άκρη του υπάρχουν ταμπελάκια με τους αρνητικούς και θετικούς αριθμούς (και το μηδέν) ανά ίσες αποστάσεις τοποθετημένα με την συνηθισμένη σειρά. Ο δρόμος αυτός ταυτίζεται με την ευθεία των πραγματικών αριθμών. Ονομάζεται **οριζόντιο σύστημα συντεταγμένων** (ΟΣΣ).

Στο ταμπελάκι που έχει τον αριθμό 0 είναι το **σημείο αναφοράς** και από εκεί ξεκινάμε να μετράμε τις αποστάσεις.

Διάνυσμα είναι ένα *βέλος* που χαρακτηρίζεται από τρεις έννοιες. Την **διεύθυνση** που είναι η *ευθεία* πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό το βέλος, την **φορά** που είναι η πλευρά προς την οποία είναι προσανατολισμένο αυτό το βέλος και από το **μέτρο** που είναι το μήκος του. Η διεύθυνση και η φορά ονομάζονται με μία λέξη: **κατεύθυνση**. Τα διανύσματα έχουν αρχή και τέλος. Πολλά διανύσματα είναι **εφαρμοστά**, δηλαδή η αρχή τους είναι κολλημένη πάνω σε ένα αντικείμενο και κινούνται μαζί με αυτό, ενώ άλλα είναι **ελεύθερα**. Για ένα διάνυσμα με **όνομα** «α» γράφουμε: $\vec{a}$, ενώ για να δηλώσουμε μόνο το μέτρο γράφουμε: α . Για να δηλώσουμε το μέτρο/μήκος του διανύσματος γράφουμε τον αριθμό μαζί με την μονάδα, δηλαδή: $\alpha=10\,m$. Αν ένα διάνυσμα είναι τοποθετημένο πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών που ταυτίζεται με τον δρόμο που κινείται/βρίσκεται το όχημα, τότε για να δηλώσουμε την κατεύθυνση βάζουμε το θετικό ή το αρνητικό πρόσημο. Αν είναι προσανατολισμένο προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά αντίστοιχα π.χ. γράφουμε $\vec{\alpha}=-10\,m$.

Θέση είναι ένα διάνυσμα που έχει αρχή το σημείο αναφοράς και τέλος το σημείο που βρίσκεται το όχημα πάνω στον δρόμο, π.χ. αν το όχημα βρίσκεται δίπλα στο ταμπελάκι με τον αριθμό -3m, τότε η θέση του είναι $\vec{x}=-3\,m$.

Μετατόπιση είναι ένα διάνυσμα που έχει αρχή το σημείο από όπου ξεκινάμε να μετράμε την κίνηση του οχήματος και πέρας το σημείο όπου σταματάμε να μετράμε την κίνηση του οχήματος. Αν κινείται προς τα δεξιά είναι θετική ενώ αν κινείται προς τα αριστερά είναι αρνητική, π.χ. για ένα όχημα που μελετάμε την κίνηση του από την θέση $\vec{x}_{αρχ}=-2\,m$ μέχρι την θέση $\vec{x}_{τελ}=+5\,m$, έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta\vec{x}=\vec{x}_{τελ}-\vec{x}_{αρχ}$ ή

$$\Delta\vec{x}=(+5\,m)-(-2\,m)=+7\,m$$

Το **διάστημα (ή απόσταση)** είναι μονόμετρο μέγεθος και μας δείχνει πόσα μέτρα έχει διανύσει ένα όχημα πάνω στην τροχιά που ακολουθεί. Τα **μονόμετρα μεγέθη** έχουν μόνο μέτρο. Το διάστημα που έχει διανύσει το όχημα στο προηγούμενο παράδειγμα είναι ίσο με $s=7\,m$. Παρατηρείστε ότι δεν υπάρχει ούτε βέλος πάνω από το «s» αλλά ούτε και πρόσημο. Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και στην ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενη ταυτίζεται με το μέτρο της μετατόπισης.

Υπάρχουν τρεις ταχύτητες:

Η **μέση ταχύτητα** ορίζεται ως το πηλίκο του διαστήματος που έχει διανύσει ένα όχημα προς το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε για να διατρέξει αυτό το διάστημα. Είναι μονόμετρο μέγεθος. Ορίζεται από τον τύπο:

$$u_{\mu}=\frac{s}{\Delta t}$$

Η **μέση διανυσματική ταχύτητα** ορίζεται ως το πηλίκο της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να συμβεί αυτή η μετατόπιση. Είναι διανυσματικό μέγεθος. Ορίζεται από τον τύπο:

$$\vec{u}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

Η μέση διανυσματική ταχύτητα και η μέση ταχύτητα έχουν φυσικό νόημα μόνο στην περίπτωση που το όχημα κινείται προς μία κατεύθυνση χωρίς να αλλάξει φορά. Σε άλλες περιπτώσεις δεν έχουν κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον και εξάγουν αποτελέσματα που είναι παράδοξα, π.χ. για ένα όχημα που κατευθύνεται από την Σπάρτη προς την Αθήνα και πάλι πίσω έχει διανύσει διάστημα περίπου ίσο με 500km και μετατόπιση ίση με 0. Αν η κίνηση έχει επιτευχθεί σε χρόνο 5h, τότε η μέση ταχύτητα θα είναι ίση με 100Km/h ενώ η μέση διανυσματική ίση με 0! Βρίσκουν όμως σημαντική εφαρμογή στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Η **στιγμιαία ταχύτητα** είναι διανυσματικό μέγεθος και μας δείχνει την ταχύτητα που έχει το όχημα κάθε χρονική στιγμή. Ορίζεται με την βοήθεια της μέσης διανυσματικής σύμφωνα με τον τύπο: (προς το παρόν δεν χρειάζεται να τον μάθετε)

$$\vec{u}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (ΕΟΚ) είναι η κίνηση που το κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή, χωρίς να αλλάζει κατεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητάς του είναι σταθερό. Αλλιώς μπορούμε να πούμε ότι το διάνυσμα της ταχύτητάς του είναι σταθερό, ίσο δηλαδή σε κάθε σημείο κατά μέτρο διεύθυνση και φορά.

Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι ίση (ως διάνυσμα) με την στιγμιαία ενώ το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας και το μέτρο της μέσης διανυσματικής είναι ίσα με την μέση ταχύτητα.

Οι **συναρτήσεις** είναι μαθηματικά κατασκευάσματα που ορίζονται ως *σχέσεις* μεταξύ δύο συνόλων Α και Β. Γράφουμε $A\,Rel\,B$. Είναι ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον θέμα αλλά στα πλαίσια αυτών των σημειώσεων θα αναφέρουμε μόνο ότι λειτουργούν ως μία «μηχανή» με μία **είσοδο** και μία **έξοδο**. Στην είσοδο τροφοδοτούμε την μηχανή με αριθμούς από το πρώτο σύνολο Α, η μηχανή κάνει πράξεις που υποδεικνύονται από τον τύπο της συνάρτησης και επιστρέφει στην έξοδο το αποτέλεσμα που είναι στο σύνολο Β. Βλέπε τον πίνακα 1.

Μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών της. Για την συνάρτηση $f(x)=x^2$ με πεδίο ορισμού $A=\{-1,0,1,2,3\}$ έχουμε τα ζεύγη:

$$A\,Rel\,B=\{(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$$

Μία **γραφική παράσταση** είναι ένας άλλος τρόπος για να απεικονίσουμε μία συνάρτηση. Αποτελείται από το **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων,** δηλαδή από δύο άξονες (κατακόρυφο και οριζόντιο), με την **αρχή** το σημείο που τέμνονται οι δύο άξονες, την κλίμακα (τους αριθμούς και τις μονάδες) και την κατεύθυνση (διάταξη των αριθμών).

Είσοδος	Τύπος	Έξοδος
...-1,0,1,2,3...	$f(x)=x^2$	...1,0,1,4,9...
$A\,Rel\,B=\{(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$		
Πεδίο ορισμού		Σύνολο τιμών
Πρώτο		Δεύτερο
Στον οριζόντιο άξονα		Στον κατακόρυφο άξονα
Ανεξάρτητη μεταβλητή		Εξαρτημένη μεταβλητή ή τιμή

Πίνακας 1: Μερικές χαρακτηριστικές εκφράσεις που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης.

Μην συγχέετε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (ΚΣΣ) της γραφικής παράστασης με το οριζόντιο σύστημα συντεταγμένων (ΟΣΣ) που χρησιμοποιούμε για να χαρακτηρίσουμε την κίνηση του οχήματος. Όμως πολλές φορές ταυτίζουμε το οριζόντιο σύστημα συντεταγμένων με τον κατακόρυφο άξονα της γραφικής παράστασης.

Για να κατασκευάσουμε μία γραφική παράσταση διαθέτουμε **διατεταγμένα ζεύγη αριθμών** που αντιστοιχούν στις εισόδους και εξόδους της συνάρτησης (μηχανής). Πρώτος αριθμός είναι πάντα η είσοδος, π.χ. από τις τιμές του πίνακα κατασκευάζουμε: (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9) κ.τ.λ. Από κάθε ζεύγος τοποθετούμε τον πρώτο αριθμό στον οριζόντιο άξονα και τον δεύτερο στον κατακόρυφο. Σχεδιάζουμε ευθείες κάθετες στους άξονες. Στο σημείο τομής σχεδιάζουμε ένα σημείο. Σχεδιάζουμε όλα τα σημεία που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη της συνάρτησης. Το σύνολο όλων αυτών των σημείων είναι η γραφική παράσταση.

Για να κατασκευάσουμε την **γραφική παράσταση μίας ευθείας** αρκούν μόνο δύο διατεταγμένα ζεύγη καθώς και το πεδίο ορισμού. Κατασκευάζουμε το πρώτο και το τελευταίο σημείο από το πεδίο ορισμού και ενώνουμε με μια ευθεία. Αναλυτικά θα δούμε το θέμα αυτό στις ασκήσεις που ακολουθούν.

Απαιτητικές γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν με προγράμματα Η/Υ όπως τα **wxmaxima** και **geogebra**.

Αναλυτικές οδηγίες σχετικά με τις σχέσεις, τις συναρτήσεις και τις γραφικές παραστάσεις θα βρείτε σε άλλες σημειώσεις που έχω δημοσιεύσει στο **koumoundouros.neocities.org**

Στην ΕΟΚ και στην γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο από το **εμβαδόν** που βρίσκεται μεταξύ της ευθείας της γραφικής παράστασης και του άξονα του χρόνου και μεταξύ των κατακόρυφων ευθύγραμμων τμημάτων μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t_0 που ορίζουν το χρονικό διάστημα Δt, βρίσκουμε το διάστημα ή το μέτρο της μετατόπισης του οχήματος. Αν το εμβαδόν είναι πάνω από τον άξονα του χρόνου, τότε η μετατόπιση είναι προς την θετική κατεύθυνση ενώ όταν το εμβαδόν είναι από την κάτω πλευρά, τότε η μετατόπιση έχει αρνητική κατεύθυνση.

Ακόμα, στην ΕΟΚ και από την γραφική παράσταση της θέσης σε συνάρτηση με τον χρόνο βρίσκουμε από την **κλίση** της ευθείας την ταχύτητα σε μέτρο και πρόσημο. Ενώ σε όλες της γραφικές παραστάσεις της θέσης, του διαστήματος και της μετατόπισης από την κλίση βρίσκουμε με ασφάλεια το μέτρο της ταχύτητας. Ενώ σχετικά με το πρόσημο θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί.

Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (ΕΟΜ) είναι η κίνηση κατά την οποία το κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή και το διάνυσμα της επιτάχυνσής του είναι σταθερό κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά.

Η μέση ταχύτητα και η στιγμιαία ταχύτητα δεν είναι ίσες. Γενικά όταν αναφερόμαστε σε ταχύτητα εννοούμε την στιγμιαία ταχύτητα.

Η στιγμιαία ταχύτητα αυξάνεται ή ελαττώνεται γραμμικά με τον χρόνο.

Το διάστημα και το μέτρο της μετατόπισης είναι ίσα. Οι κατευθύνσεις της μετατόπισης και της ταχύτητας είναι ίδιες.

Εάν οι κατευθύνσεις της επιτάχυνσης και της ταχύτητας είναι ίδιες, τότε η κίνηση ονομάζεται **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη (ΕΟΜ+),** αλλιώς αν οι κατευθύνσεις είναι αντίθετες τότε ονομάζεται **ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη (ΕΟΜ-).**

Η επιτάχυνση έχει πάντα την ίδια κατεύθυνση με την μεταβολή της ταχύτητας.

Η συνάρτηση της επιτάχυνσης είναι σταθερή και την βρίσκουμε από τον τύπο:

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$$ Σχέση (1)

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι γραμμική συνάρτηση σε σχέση με τον χρόνο και την υπολογίζουμε από τον τύπο:

$$\vec{u}=\vec{u}_0+\vec{a}\cdot(t-t_0)$$ Σχέση (2)

Τέλος υπολογίζουμε την εξίσωση της κίνησης από τον τύπο:

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{u}_0\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot(t-t_0)^2$$ Σχέση (3)

Προσοχή: σε όλους τους παραπάνω τύπους πρέπει να αντικαταστήσουμε τα διανυσματικά μεγέθη με το πρόσημο και το μέτρο αφού το όχημα κινείται πάνω σε ευθύγραμμη τροχιά.

Ακόμα, θα χρησιμοποιήσουμε την τελευταία σχέση στην μορφή:

$$\Delta\vec{x}=\vec{u}_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\Delta t^2$$

όπου διαλέγουμε δύο σημεία της τροχιάς, π.χ. τα Α και Β, επομένως $\Delta\vec{x}$ είναι η μετατόπιση από το Α προς το Β, $\vec{u}_0$ είναι η ταχύτητα στο πρώτο σημείο Α ($\vec{u}_A=\vec{u}_0$) και Δt είναι το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε το όχημα για να διατρέξει την διαδρομή από το Α προς το Β. Υπενθυμίζω ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη προς μία κατεύθυνση.

Σχετικά με τις γραφικές παραστάσεις τα πράγματα είναι απλά για την πρώτη και δεύτερη σχέση αφού αυτές είναι ευθείες. Η πρώτη είναι ευθεία παράλληλη στον οριζόντιο άξονα ενώ η δεύτερη σχηματίζει κάποια γωνία με τον οριζόντιο άξονα.

Η γραφική παράσταση της τρίτης σχέσης είναι καμπύλη και για να την σχεδιάσουμε με ακρίβεια ακολουθούμε τις παρακάτω οδηγίες.

Η σχέση αυτή είναι όμοια με την σχέση:

$$x(t)=\alpha\cdot t^2+\beta\cdot t+\gamma,\alpha\neq 0$$

Υπολογίζουμε την διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

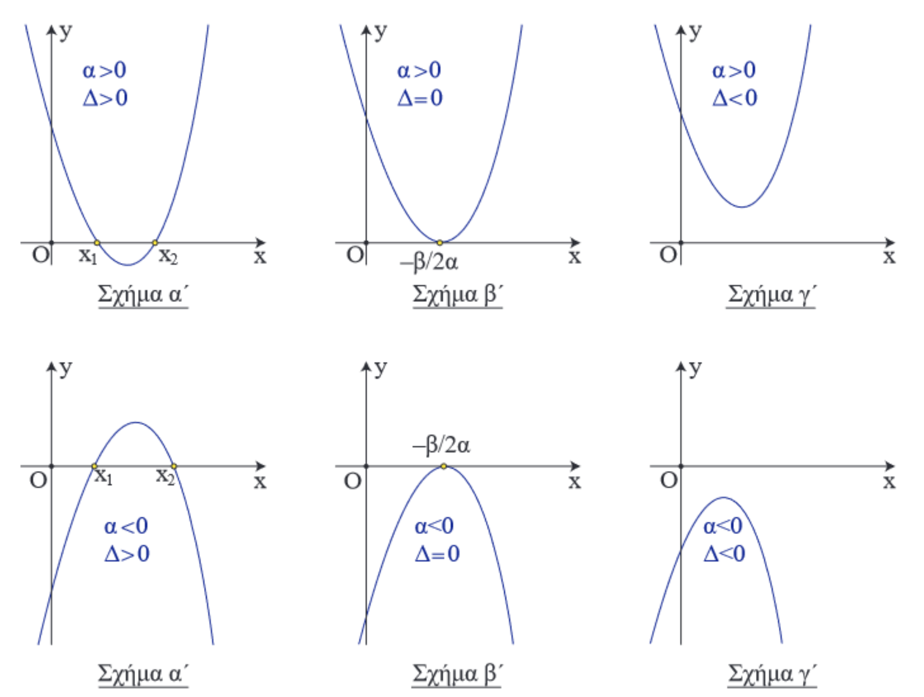
Βρίσκουμε την κορυφή: $K(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha})$

Σχηματίζουμε παραβολή με κορυφή το σημείο Κ και αν $\alpha>0$ τότε η παραβολή έχει κατεύθυνση: ∪ ενώ αν $\alpha<0$ τότε έχει κατεύθυνση: ∩ Λάβετε υπόψιν ότι εμείς θα χρειαστεί να σχεδιάσουμε μόνο ένα τμήμα της.

Αναλυτικές οδηγίες θα βρείτε στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών της Α Λυκείου στην σελίδα 199 ή στο ιστολόγιο **koumoundouros.neocities.org**. Παρακάτω παραθέτουμε έναν σχετικό πίνακα από το ίδιο βιβλίο που θα σας φανεί χρήσιμος.

Ένα άλλο σημαντικό ζήτημα είναι ο τρόπος με τον οποίο ξεχωρίζουμε μία ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση σε επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη. Οι περισσότεροι από εσάς αρχικά πιστεύετε ότι μπορείτε αυτό να το βρείτε από το πρόσημο της επιτάχυνσης, αλλά αυτό είναι ένα λάθος. Ο σωστός τρόπος για να διακρίνουμε την επιταχυνόμενη από την επιβραδυνόμενη κίνηση είναι να συγκρίνουμε τις κατευθύνσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Αν αυτές οι κατευθύνσεις είναι ίδιες, δηλαδή και οι δύο θετικές ή και οι δύο αρνητικές, τότε η κίνηση είναι επιταχυνόμενη. Αλλιώς αν η μία είναι θετική και η άλλη αρνητική, τότε η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη. Βλέπε άσκηση 19.

Ένα ακόμα ζήτημα που πρέπει να προσέχετε είναι ότι με το εμβαδόν υπολογίζουμε το διάστημα και όχι την μετατόπιση. Εξάλλου σκεφτείτε ότι και το εμβαδόν και το διάστημα είναι μονόμετρα μεγέθη. Για να υπολογίσουμε το διάστημα πρέπει να σιγουρευτούμε ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη συνεχώς προς μία κατεύθυνση. Σε αυτήν την περίπτωση το μέτρο της μετατόπισης είναι ίσο με το εμβαδόν ή το διάστημα. Για να υπολογίσουμε την κατεύθυνση της μετατόπισης πρέπει να ελέγξουμε την κατεύθυνση της ταχύτητας, δηλαδή να βρούμε προς ποια κατεύθυνση κινείται το όχημα.



Σχήμα 1: Σε αυτό τον πίνακα βλέπουμε τις πιθανές μορφές της παραβολής. Προσοχή πρέπει να αντικαταστήσετε την μεταβλητή x με t και την y με x.

Τελειώνοντας, οφείλω να σας υπενθυμίσω ότι πρέπει να εξασκήσετε τις ικανότητές σας στα Μαθηματικά και συγκεκριμένα στις έννοιες

(α) του διανύσματος,

(β) των σχέσεων και συναρτήσεων,

(γ) των γραφικών παραστάσεων ευθειών και υπερβολών,

(δ) των εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού,

(ε) των γραμμικών συστημάτων,

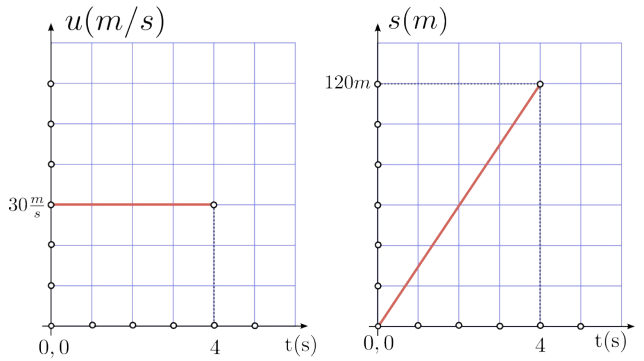
(στ) και φυσικά των αριθμητικών πράξεων χωρίς την χρήση αριθμομηχανής (πράξεις ρητών).

Ασκήσεις του βιβλίου

A1 Ένα αυτοκίνητο διανύει απόσταση 120m σε χρόνο 4s με σταθερή ταχύτητα. Να υπολογίσετε την τιμή της ταχύτητας του αυτοκινήτου και να κάνετε τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου και διαστήματος - χρόνου.

Λύση:

Στην εκφώνηση παρατηρούμε ότι το όχημα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της ταχύτητας είναι σταθερά. Δηλαδή το όχημα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά (ΕΟΚ). Επίσης θα θεωρήσουμε ότι



Σχήμα 2. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της ταχύτητας και του διαστήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

μελετάμε την κίνησή του από την χρονική στιγμή $t_0=0$, έως την $t=4s$.

Η απόσταση (το διάστημα) που διανύει το όχημα είναι ίσο με το μέτρο της μετατόπισης. Άρα το μέτρο της μέσης ταχύτητας είναι:

$$u=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{120\,m}{4\,s}=30\,\frac{m}{s}$$

Το μέτρο αυτό είναι ίσο με το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας, αφού η κίνηση είναι ΕΟΚ. Επομένως η συνάρτηση της ταχύτητας είναι:

$$u(t)=30,\quad t\in[0,4],\quad (S.I.)$$

Για να φτιάξουμε την συνάρτηση του διαστήματος χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$s(t)=|\Delta x|=|u\cdot(t-t_o)|=|30\cdot t|,\ \ t\in[0,4],\ (S.I.)$$

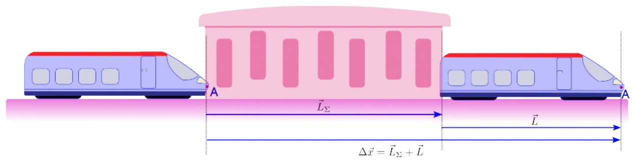
Από τις δύο αυτές συναρτήσεις της ταχύτητας και του διαστήματος φτιάχνουμε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις τις οποίες βλέπουμε στο σχήμα 1.

Οι γραφικές αυτές παραστάσεις είναι ευθείες και για να πραγματοποιηθούν αρκεί να βρούμε δύο σημεία από το πεδίο ορισμού τους· το πρώτο και το τελευταίο, π.χ. για την γραφική παράσταση του διαστήματος $s(t)=|30\cdot t|$ με πεδίο ορισμού $t\in[0,4\,s]$, υπολογίζουμε για $t_0=0$ ότι $s(0)=0$ και για $t=4s$ έχουμε ότι $s(4)=120\,m$. Δηλαδή έχουμε τα διατεταγμένα ζεύγη (0,0) και (4,120). Τα σχεδιάζουμε και τα συνδέουμε με μία ευθεία.

A2 Μια ατμομηχανή έχει μήκος $L=20\,m$, κινείται με ταχύτητα $\upsilon=10\,m/s$ και περνά μια γέφυρα μήκους $L_\Sigma=1.980\,m$. Για πόσο χρόνο θα βρίσκεται τμήμα της ατμομηχανής πάνω στη γέφυρα;

Λύση:

Φανταστείτε το τραίνο να κινείται πάνω στις γραμμές και να πλησιάζει την γέφυρα. Την πρώτη φορά που τμήμα του τραίνου βρίσκεται πάνω στην γέφυρα είναι όταν για πρώτη φορά η «μύτη» του τραίνου εισέρχεται στην γέφυρα, ενώ τελευταία φορά που ένα τμήμα του είναι πάνω στην γέφυρα είναι όταν το πίσω ακριανό τμήμα της «ουράς» του εξέρχεται από την γέφυρα. Επομένως ένα τυχαίο σημείο (π.χ. το A) του τραίνου έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά $\Delta x=L+L_\Sigma=+2000\,m$.



Σχήμα 3. Τμήμα του τραίνου βρίσκεται πάνω στην γέφυρα.

Στα πλαίσια της άσκησης δεχόμαστε ότι το τραίνο κινείται με σταθερή ταχύτητα, επομένως κάνει ΕΟΚ και το μέτρο της στιγμιαίας και της μέσης ταχύτητας είναι ίσα. Επομένως, από τον τύπο της μέσης ταχύτητας έχουμε:

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{u}=\frac{2000\,m}{10\,m/s}=200\,s$$

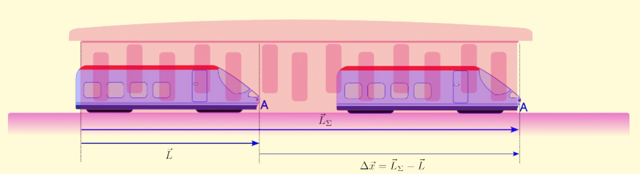
Δηλαδή τμήματα του τραίνου βρίσκονται πάνω στην γέφυρα για $200\,s$.

Στα πλαίσια αυτής της άσκησης θα αναγκαστούμε να λύσουμε ερωτήματα του τύπου:

(A) «Για πόσο χρόνο όλο το τραίνο βρίσκεται πάνω στην γέφυρα;» Βλέπε σχήμα 4

Σε αυτή την περίπτωση την πρώτη φορά που ολόκληρο το τραίνο είναι πάνω στην γέφυρα είναι όταν το τελευταίο σημείο της ουράς του εισέρχεται πάνω στην γέφυρα και για τελευταία φορά που ολόκληρο το τραίνο είναι πάνω στην γέφυρα είναι όταν το πρώτο σημείο της μύτης του εξέρχεται για πρώτη φορά από την γέφυρα.

Σε αυτή την περίπτωση η μετατόπιση ενός τυχαίου σημείου είναι ίση με $\Delta x=L_\Sigma-L=1960\,m$. Επομένως τώρα ο χρόνος που ολόκληρο το τραίνο

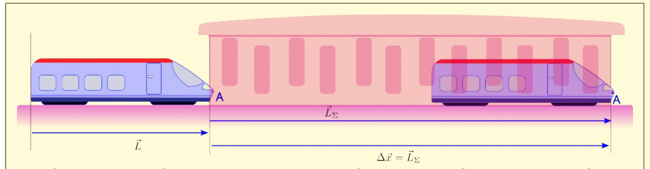


Σχήμα 4. Ολόκληρο το τραίνο βρίσκεται πάνω στην γέφυρα.

είναι πάνω στην γέφυρα είναι ίσο με:

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{u}=\frac{1960\,m}{10\,m/s}=196\,s$$

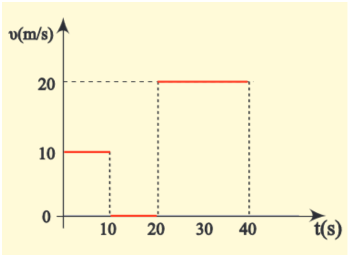
(B) «Για πόσο χρόνο κάποιο συγκεκριμένο σημείο του τραίνου βρίσκεται πάνω στην γέφυρα;» Βλέπε σχήμα 5.



Σχήμα 5. Κάποιο συγκεκριμένο σημείο του τραίνου βρίσκεται πάνω στην γέφυρα.

Εδώ η μετατόπιση είναι ίση με $\Delta x=L_\Sigma=1980\,m$, ενώ αντίστοιχα το χρονικό διάστημα ίσο με $\Delta t=198\,s$.

Α3 Όχημα κάνει ευθύγραμμη κίνηση και το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου φαίνεται στην εικόνα 6.



Σχήμα 6. Γραφική παράσταση ταχύτητα σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Α. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διανύει το όχημα.

Β. Ποια είναι η τιμή της μέσης ταχύτητας του οχήματος;

Γ. Να γίνει το διάγραμμα διαστήματος χρόνου.

Λύση:

(Α) Στην ΕΟΚ και από την γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο μπορούμε να υπολογίσουμε την μετατόπιση. Το μέτρο της μετατόπισης καθώς και το διάστημα υπολογίζεται από το εμβαδόν που περικλείεται από την ευθεία της γραφικής παράστασης και του άξονα του χρόνου αλλά και από τις κατακόρυφους στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές.

Αν το εμβαδόν είναι πάνω από τον άξονα του χρόνου, τότε η μετατόπιση έχει θετική κατεύθυνση, αφού η ταχύτητα είναι συνεχώς θετική, επομένως το όχημα κινείται προς τα δεξιά, ενώ αν είναι από κάτω τότε είναι αρνητική.

Στην περίπτωση αυτή θα εργαστούμε σε τρία τμήματα. **(α)** Για $t \in [0,10\,s]$ το εμβαδόν είναι ίσο με $E_1=100$ άρα και η μετατόπιση είναι ίση με $\Delta x_1=+100\,m$, επομένως και το διάστημα είναι ίσο με το μέτρο της μετατόπισης, δηλαδή $s_1=100\,m$. **(β)** Για $t \in [10,20\,s]$ το εμβαδόν είναι ίσο με $E_2=0$ άρα και η μετατόπιση είναι ίση με $\Delta x_2=0$ και $s_2=0$. **(γ)** Για $t \in [20,40\,s]$ το εμβαδόν είναι ίσο με $E_2=400$ άρα και η μετατόπιση είναι ίση με $\Delta x_2=+400\,m$ και $s_2=400\,m$. Επομένως η συνολική μετατόπιση είναι ίση με $s=500\,m$.

(Β) Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι ίσος με $\Delta t=40\,s$, το διάστημα είναι ίσο με $s=500\,m$, επομένως η μέση ταχύτητα υπολογίζεται από τον τύπο $u_\mu=\dfrac{s}{\Delta t}=\dfrac{500\,m}{40\,s}=12{,}5\,m/s$.

(Γ) Για να κάνουμε την γραφική παράσταση του διαστήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο πρέπει να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση. Πρέπει να γίνει σε τρία τμήματα λαμβάνοντας υπόψιν ότι σε κάθε τμήμα ισχύει η σχέση: $s(t)=|\Delta x|=|u(t-t_0)|$. Επομένως θα κατασκευάσουμε την παρακάτω τρικλαδική συνάρτηση.

$$s(t)=\begin{cases} 10\cdot(t-0), t\in[0,10] \\ 100+0\cdot(t-10), t\in(10,20] \\ 100+20\cdot(t-20), t\in(20,40] \end{cases} \quad (S.I.)$$

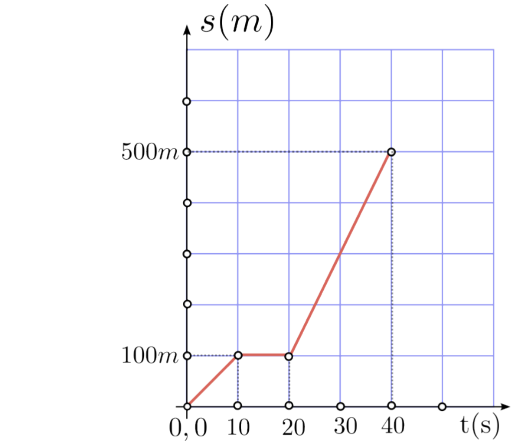
Προσέξτε ότι για τον δεύτερο και τρίτο κλάδο θα πρέπει να προσθέσουμε και το διάστημα που έχει ως εκείνη την στιγμή διατρέξει το όχημα αφού υπολογίζουμε το συνολικό διάστημα.

Επίσης προσέξτε ότι στον δεύτερο κλάδο έχουμε ακινησία και το συνολικό διάστημα είναι σταθερό (ανεξάρτητο του χρόνου).

Ο παραπάνω τύπος μετά από τις σχετικές πράξεις απλοποιείται:

$$s(t)=\begin{cases} 10t, \ t\in[0,10] \\ 100, \ t\in(10,20] \\ 100+20\cdot(t-20), \ t\in(20,40] \end{cases} \quad (S.I.)$$

Επομένως έχουμε να σχεδιάσουμε τρεις ξεχωριστές ευθείες, μία για κάθε κλάδο. Κάθε ευθεία την κατασκευάζουμε με την μέθοδο των δύο σημείων, δηλαδή υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης για το αρχικό και τελικό σημείο του πεδίου ορισμού, π.χ. για την πρώτη ευθεία παίρνουμε για $t=0$ και $t=10\,s$ και βρίσκουμε τις τιμές $s(0)=0$ και $s(10)=100\,m$ αντίστοιχα.



Σχήμα 7. Γραφική παράσταση της θέσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Για την πρώτη ευθεία έχουμε τα ζεύγη (0,0) και (10, 100) που υπολογίζονται από τον πρώτο τύπο.

Για την δεύτερη ευθεία έχουμε τα ζεύγη (10,100) και (20,100).

Για την τρίτη ευθεία είναι (20,100) και (40, 500).

Παρακάτω βλέπουμε τον πίνακα τιμών αυτής της συνάρτησης ανά 2s

Χρονική στιγμή t(s)	Τιμή s(t) σε m
0	0
2	20
4	40
6	60
8	80
10	100
12	100
14	100
16	100
18	100
20	100
22	140
24	180
26	220
28	260
30	300
32	340
34	380
36	420
38	460
40	500

Παρατηρείστε ότι χωρίζεται σε τρία τμήματα.

A4 Δύο αυτοκίνητα ξεκινάνε ταυτόχρονα από τα σημεία Α και Β μιας ευθύγραμμης διαδρομής κινούμενα αντίθετα με σταθερές ταχύτητες $\upsilon_1=36\,km/h$ και $\upsilon_2=54\,km/h$ αντίστοιχα.

Α. Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο και σε ποιο σημείο θα συναντηθούν τα αυτοκίνητα, αν είναι $AB=1\,km$.

Β. Να γίνουν τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου και διαστήματος - χρόνου και για τα δύο κινητά σε κοινά συστήματα αξόνων.

Λύση:

Για να λύσουμε ασκήσεις αυτής της κατηγορίας πρέπει να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις κίνησης και ταχύτητας των δύο κινητών.

Η **εξίσωση κίνησης** ενός κινητού δεν είναι τίποτα άλλο παρά η συνάρτηση που δίνει την θέση του κινητού σε συνάρτηση με τον χρόνο. Για να γίνει αυτό αρκεί να πάρουμε τον τύπο της μέσης ταχύτητας (μην ξεχνάτε ότι η μέση ταχύτητα στην ΕΟΚ έχει τα ίδια αποτελέσματα με την στιγμιαία, σε μέτρο, διεύθυνση και φορά).

$$u=\frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ ή } \Delta x=u\cdot\Delta t \text{ ή } x-x_0=u\cdot(t-t_0) \text{ ή}$$

$$x=x_0+u\cdot(t-t_0)$$

Τον τελευταίο αυτό τύπο θα τον χρησιμοποιήσουμε πάρα πολλές φορές. Θα αντικαταστήσουμε όλα τα γράμματα με αριθμούς εκτός από το x και t. Επίσης πρέπει στα x_0 και u να αντικαταστήσουμε και τα πρόσημα αφού είναι διανυσματικά μεγέθη. Ενώ στο t_0 δεν βάζουμε πρόσημο αφού είναι μονόμετρο μέγεθος. Την εξίσωση κίνησης την κατασκευάζουμε για κάθε όχημα ξεχωριστά.

Επίσης πριν προχωρήσουμε πρέπει να τοποθετήσουμε ένα **οριζόντιο σύστημα αναφοράς** στο πρόβλημα που μας δίνεται. *Ένα οριζόντιο σύστημα αναφοράς που περνά από τις πόλεις Α και Β, έχει το σημείο αναφοράς στην πόλη Α και θετική κατεύθυνση από την πόλη Α προς την Β* θα είναι ιδανικό για την επίλυση του προβλήματος. Εσείς θα μπορούσατε να διαλέξετε σαν σημείο αναφοράς την πόλη Β απλά θα πρέπει να κάνετε μερικές μικρές τροποποιήσεις.

(1) Για το **όχημα (Α)** που κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_1=36\,Km/h$ προς την θετική κατεύθυνση και την χρονική στιγμή $t_0=0$ βρίσκεται στην θέση $x_0=0$ κατασκευάζουμε την εξίσωση

$$x_1=0+36\cdot(t-0),\quad (x\,\sigma\varepsilon\,Km,t\,\sigma\varepsilon\,h)$$

και μετά από σχετικές πράξεις:

$$x_1(t)=36\cdot t,\quad (x\,\sigma\varepsilon\,Km,t\,\sigma\varepsilon\,h)$$

(2) Για το **όχημα (Β)** που κινείται και αυτό με σταθερή ταχύτητα $u_2=54\,Km/h$ προς την αρνητική κατεύθυνση και την χρονική στιγμή $t_0=0$ βρίσκεται στην θέση $x_0=1\,Km$ δηλαδή στην πόλη Β. Επομένως:

$$x_2(t)=1-54\cdot(t-0),\quad (x\,\sigma\varepsilon\,Km,t\,\sigma\varepsilon\,h) \text{ ή}$$

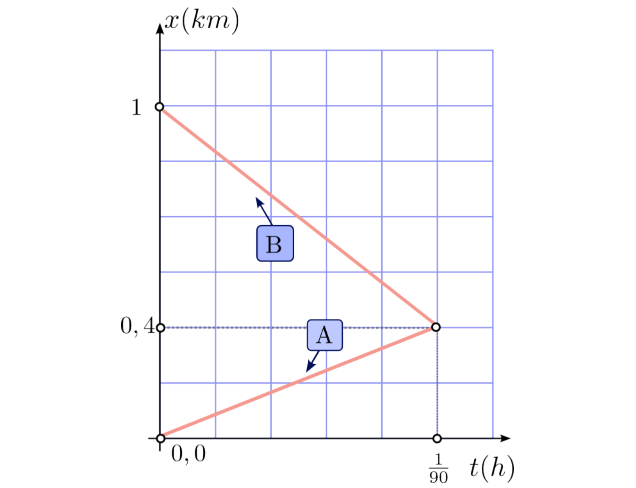
$$x_2(t)=1-54\cdot t,\quad (x\,\sigma\varepsilon\,Km,t\,\sigma\varepsilon\,h)$$

Για να υπολογίσουμε τώρα την **χρονική στιγμή** όπου τα δύο οχήματα συναντιούνται αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$x_1(t)=x_2(t) \text{ ή } 36\cdot t=1-54\cdot t \text{ ή } t=\frac{1}{90}h=40\,s$$

Για να υπολογίσουμε το **χρονικό διάστημα** που απαιτείται για να συναντηθούν τα δύο οχήματα πρέπει

$$\Delta t=t-t_0 \text{ ή } \Delta t=40-0 \text{ ή } \Delta t=40\,s$$



Σχήμα 8. Γραφική παράσταση της **θέσης** σε συνάρτηση με τον χρόνο των οχημάτων Α και Β σε κοινό σύστημα αξόνων.

Για να υπολογίσουμε το κοινό σημείο (**την θέση**) όπου συναντιούνται τα δύο οχήματα παίρνουμε μία συνάρτηση από τις δύο και αντικαθιστούμε για $t=1/90\,h$ και βρίσκουμε την τιμή της:

$$x_1(t)=\frac{36\cdot 1}{90} \text{ ή } x_1=0{,}4\,km$$

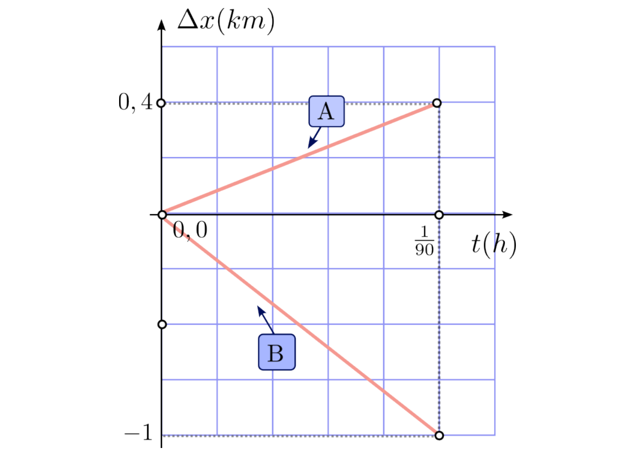
Δηλαδή τα δύο οχήματα θα συναντηθούν στο σημείο του δρόμου που δείχνει τον αριθμό 0,4km

Για να υπολογίσουμε την **μετατόπιση** κάθε οχήματος έχουμε:

$$\Delta x_1=x_1-x_0=0{,}4-0 \text{ ή } \Delta x_1=0{,}4\,km$$

και

$$\Delta x_2=x_2-x_0=0{,}4-1 \text{ ή } \Delta x_2=-0{,}6\,km$$



Σχήμα 9. Γραφική παράσταση της **μετατόπισης** σε συνάρτηση με τον χρόνο των οχημάτων Α και Β σε κοινό σύστημα αξόνων. Παρατηρείστε ότι η μετατόπιση του δεύτερου οχήματος είναι αρνητική.

Τέλος για να υπολογίσουμε το **διάστημα** κάθε οχήματος είναι:

$$s_1=|\Delta x_1|=0{,}4\,Km \text{ και } s_2=|\Delta x_2|=0{,}6\,Km$$

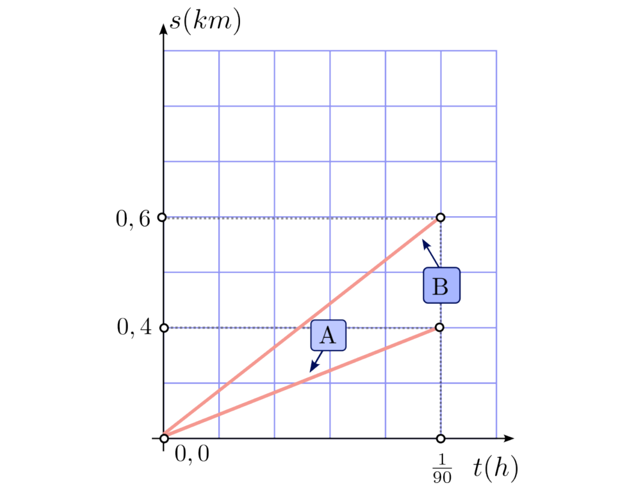
Από εδώ και κάτω θα ασχοληθούμε με τις διάφορες γραφικές παραστάσεις που μπορούμε να κάνουμε. Για μα είμαστε ακριβείς, πρέπει να πούμε ότι θα κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις στο χρονικό διάστημα $t \in [0{,}40\,s]$ (**πεδίο ορισμού**), δηλαδή μέχρι τα οχήματα να συναντηθούν.

Για να κάνουμε τις **γραφικές παραστάσεις της θέσης σε συνάρτηση με τον χρόνο** για τα δύο οχήματα παίρνουμε τις συναρτήσεις:

$$x_1(t)=36 \cdot t,\quad (x\,\sigma\varepsilon\,Km, t\,\sigma\varepsilon\,h)\ \text{και}$$

$$x_2(t)=1-54 \cdot t,\quad (x\,\sigma\varepsilon\,Km, t\,\sigma\varepsilon\,h)$$

Με την μέθοδο των δύο σημείων για την πρώτη ευθεία παίρνουμε τις τιμές $x_1(0)=0$ και $x_2(40)=0{,}4\,km$, ενώ για την δεύτερη ευθεία παίρνουμε τις τιμές $x_2(0)=1\,km$ και $x_2(40)=0{,}4\,km$. Με αυτά τα σημεία κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος 8 σε κοινό σύστημα αξόνων.



Σχήμα 10. Γραφική παράσταση **του διαστήματος** σε συνάρτηση με τον χρόνο των οχημάτων Α και Β σε κοινό σύστημα αξόνων.

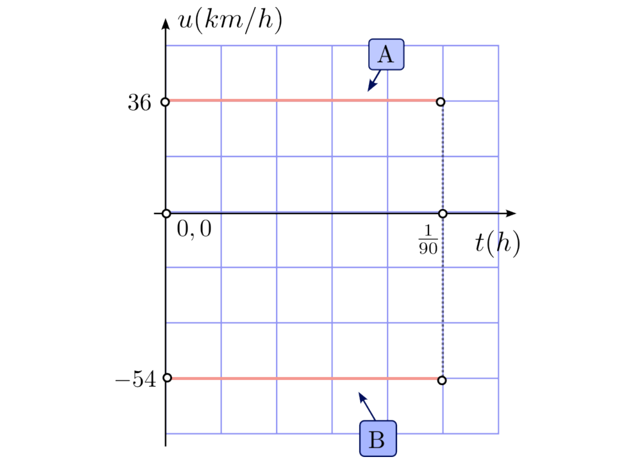
Για να κάνουμε **τις γραφικές παραστάσεις της μετατόπισης σε συνάρτηση με τον χρόνο** για τα δύο οχήματα πρέπει να πάρουμε τις συναρτήσεις:

$$\Delta x_1(t)=x-x_0=36 \cdot t-0=36 \cdot t\ \text{και}$$

$$\Delta x_2(t)=x-x_0=(1-54 \cdot t)-1=-54 \cdot t$$

τις γραφικές παραστάσεις των οποίων βλέπουμε στο σχήμα 9:

Για να κάνουμε **τις γραφικές παραστάσεις του διαστήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο** για τα δύο οχήματα πρέπει να πάρουμε τις συναρτήσεις:



Σχήμα 11. Γραφική παράσταση της **μέσης διανυσματικής** ή της **στιγμιαίας ταχύτητας**

$$s_1(t)=|\Delta x_1(t)|=36 \cdot t\ \text{και}$$

$$s_2(t)=|\Delta x_2(t)|=54 \cdot t$$

τις γραφικές παραστάσεις των οποίων βλέπουμε στο σχήμα 10:

Τέλος, για να κάνουμε τις **γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας** (η μέση διανυσματική και στιγμιαία ταχύτητα στην ΕΟΚ είναι ίδια) παίρνουμε τις συναρτήσεις:

$$u_1(t)=36\ \text{και}$$

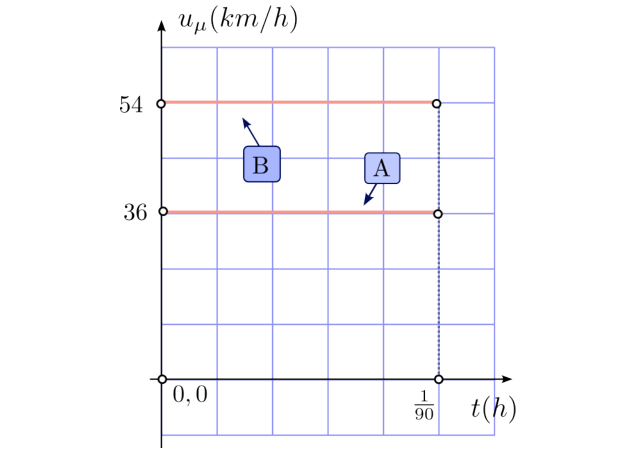
$$\upsilon_2(t)=-54$$

τις γραφικές παραστάσεις των οποίων βλέπουμε στο σχήμα 11 :

Αντίθετα, για να κάνουμε τις **γραφικές παραστάσεις της μέσης ταχύτητας** (το μέτρο και των τριών ταχυτήτων στην ΕΟΚ είναι ίδιο) παίρνουμε τις συναρτήσεις:

$$u_{\mu 1}(t)=36\ \text{και}$$

$$\upsilon_{\mu 2}(t)=54$$



Σχήμα 12. Γραφική παράσταση της **μέσης ταχύτητας**

τις γραφικές παραστάσεις των οποίων βλέπουμε στο σχήμα 12 :

Παρατηρείστε λοιπόν ότι τα φυσικά μεγέθη, όπως και οι γραφικές παραστάσεις που θα κληθούμε να υπολογίζουμε ή να σχεδιάσουμε, είναι αρκετά. Επομένως χρειάζεται μια σχετική προσοχή.

A5 Περιπολικό αρχίζει να καταδιώκει μοτοσυκλετιστή που βρίσκεται σε απόσταση $d=500\,m$ μπροστά από το περιπολικό. Το περιπολικό έχει σταθερή ταχύτητα $\upsilon_\pi=30\,m/s$, ενώ ο μοτοσικλετιστής κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_M=20\,m/s$

Να βρεθούν:

Α. Ο χρόνος t που απαιτείται για να φτάσει το περιπολικό τον μοτοσυκλετιστή.

Β. Το διάστημα που θα διανύσει το περιπολικό στο χρόνο αυτό.

Λύση:

Αυτή η άσκηση λύνεται με τον ίδιο τρόπο που λύσαμε και την άσκηση 4. Σας την αφήνω να την λύσετε ως εφαρμογή της.

A6 Η εξίσωση κίνησης ενός ποδηλάτη που κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά είναι:

$$x=10\,t\,(x\,\sigma\varepsilon\,m, t\,\sigma\varepsilon\,s)$$

Να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για την κίνηση αυτή, από $t=0$ μέχρι $t=5\,s$. Να υπολογίσετε το διάστημα που διένυσε ο ποδηλάτης σε 5s.

Λύση:

Εδώ βλέπουμε ότι η εκφώνηση μας δίνει την εξίσωση της κίνησης, δηλαδή την συνάρτηση της θέσης σε συνάρτηση με τον χρόνο:

$$x(t)=10 \cdot t$$

Επίσης μα δίνει και το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης που είναι καθοριστικό για την επίλυση της άσκησης:

$$t\in[0,5s]$$

Δηλαδή θα μελετήσουμε την κίνηση του οχήματος από την χρονική στιγμή $t=0$ έως την $t=5s$.

Αρχικά θα κάνουμε την γραφική παράσταση της θέσης σε συνάρτηση με τον χρόνο. Αυτό μπορεί να γίνει με την μέθοδο των δύο σημείων αφού αυτή η γραφική παράσταση είναι ευθεία.

Ευθεία είναι κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$f(t)=a\cdot t+b$$

όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, π.χ. ευθείες είναι οι

$$f(t)=-2\cdot t+5,\quad x(t)=3\cdot t-5$$

ενώ οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι ευθείες:

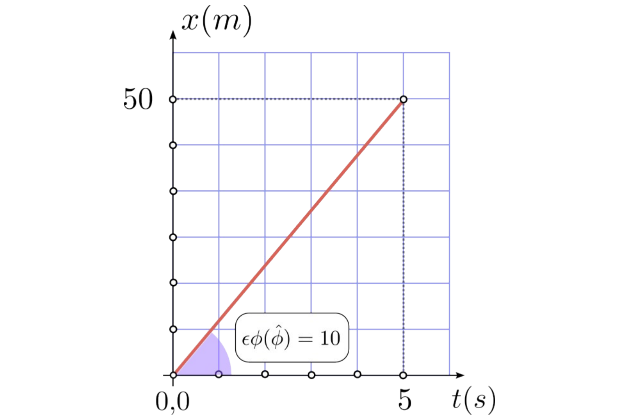
$$\varphi(t)=2\cdot x^2-4\cdot t-5,\quad u(t)=3\cdot e^{-3t}$$

δηλαδή για να είναι μία συνάρτηση ευθεία πρέπει να είναι πολυωνυμική και η μεγαλύτερη δύναμη της ανεξάρτητης μεταβλητής να είναι η πρώτη.

Μία ευθεία στον Ευκλείδιο χώρο ορίζεται ακριβώς από δύο σημεία. Εμείς θα παίρνουμε το αρχικό και τελικό σημείο του πεδίου ορισμού, θα βρίσκουμε τις τιμές, θα σχηματίζουμε τα διατεταγμένα ζεύγη, θα τα σχεδιάζουμε στην γραφική παράσταση και θα τα ενώνουμε με μία ευθεία. Βλέπε παρακάτω.

Για να κάνουμε λοιπόν την γραφική παράσταση της ευθείας $x(t)=10\cdot t, t\in[0,5]$, βρίσκουμε αρχικά τις τιμές της συνάρτησης για t=0 και t=5, δηλαδή $x(0)=0$ και $x(5)=50$. Επομένως έχουμε τα δύο διατεταγμένα ζεύγη (0,0) και (5,50). Τα σχεδιάζουμε πάνω σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και τα ενώνουμε με μία ευθεία.

Όπως γνωρίζουμε από την κλίση της γραφικής παράστασης της θέσης σε συνάρτηση με τον



Σχήμα 13. Γραφική παράσταση της **θέσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.**

χρόνο στην ΕΟΚ μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του οχήματος.

Η **κλίση** μίας ευθείας ορίζεται ως η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα, αρχίζοντας να την μετράμε απο τον ημιάξονα Ox π.χ. η γωνία φ του σχήματος 13

Για να υπολογίσουμε την κλίση μίας ευθείας έχουμε δύο μεθόδους:

(Α) Από τον ορισμό της της εφαπτομένης μίας **οξείας γωνίας** σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τον τύπο:

$$\varepsilon\varphi(\varphi)=\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

Αν η γωνία είναι αμβλεία παίρνουμε την παραπληρωματική της και προσθέτουμε ένα αρνητικό πρόσημο.

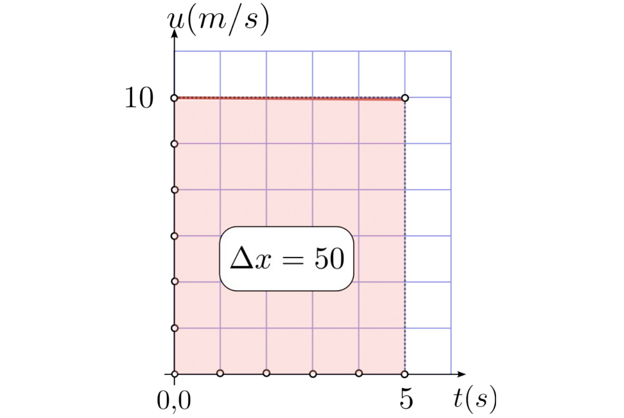
(Β) Από τις συντεταγμένες δύο σημείων που ανήκουν στην ευθεία με τον τύπο:

$$\varepsilon\varphi(\varphi)=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$

Αυτός ο τύπος υπολογίζει και θετικές και αρνητικές κλίσεις.

Εμείς στην άσκηση θα υπολογίσουμε την κλίση με την μέθοδο των συντεταγμένων:

$$\varepsilon\varphi(\varphi)=\frac{50-0}{5-0}=10\,m/s$$



Σχήμα 14. Γραφική παράσταση της **ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο.**

Επομένως το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας (της μέσης διανυσματικής και της μέσης) είναι σταθερό (ΕΟΚ) και ίσο με:

$$u(t)=10(u\,\sigma\varepsilon\,m/s,\ t\,\sigma\varepsilon\,s)$$

Αυτή είναι και η συνάρτηση της ταχύτητας (εξίσωση ταχύτητας) σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Αν στον τύπο μίας συνάρτησης δεν υπάρχει η ανεξάρτητη μεταβλητή, καταλαβαίνουμε ότι είναι η **σταθερή συνάρτηση** και η γραφική της παράσταση θα είναι ευθεία παράλληλη με τον άξονα των χρόνων.

Εμείς για να κάνουμε την γραφική παράσταση θα σχεδιάσουμε τα δύο διατεταγμένα ζεύγη: (0,10) και (5,10) και θα τα ενώσουμε με μία ευθεία.

Παρατηρείστε ότι η στιγμιαία ταχύτητα (το διάνυσμα) είναι θετικό, δηλαδή το κινητό τρέχει με 10m/s προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση είναι η συνηθισμένη προς τα δεξιά).

Από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης της ταχύτητας στην ΕΟΚ βρίσκουμε το διάστημα $s=50\,m$ ή το μέτρο της μετατόπισης και αφού το όχημα κινείται συνεχώς προς τα δεξιά (ή αλλιώς το εμβαδόν είναι από την πάνω πλευρά) συνάγουμε ότι και η μετατόπιση (το διάνυσμα) είναι $\Delta x=+50\,m$

Σε αυτό το σημείο θα παρεμβάλω ένα μικρό ένθετο που είναι εκτός ύλης.

Υπάρχει η δυνατότητα να υπολογίσουμε την εξίσωση της ταχύτητας ή την εξίσωση της επιτάχυνσης από την εξίσωση της θέσης (εξίσωση κίνησης) με μία πολύ απλή πράξη που ονομάζεται **παράγωγος.**

Για να καταλάβετε την λογική αυτής της πράξης πρέπει να πούμε ότι η πράξη της παραγώγησης εφαρμόζεται πάνω σε μία συνάρτηση και την μεταβάλλει.

Μεταβάλλει λοιπόν τις συναρτήσεις σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

(1) Μετασχηματίζει κάθε όρο μίας συνάρτησης.

(2) Αν ο όρος αυτός είναι ένας αριθμός, τότε τον μετατρέπει σε 0.

(3) Αν ο όρος περιέχει $\alpha \cdot t$ τότε το μετατρέπει σε α .

(4) Αν ο όρος περιέχει το $\alpha \cdot t^2$ τον μετατρέπει σε $2 \cdot a \cdot t$.

Υπάρχουν πάρα πολλοί κανόνες, αλλά οι παραπάνω είναι αρκετοί για την επίλυση των ασκήσεων της φυσικής του Λυκείου.

Την πράξη αυτή την συμβολίζουμε με έναν τόνο ή με τον τελεστή $\frac{d}{dt}$. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

$$\frac{d}{dt} a = (a)' = 0$$

$$\frac{d}{dt}(a \cdot t) = (a \cdot t)' = a$$

$$\frac{d}{dt}(a \cdot t^2) = (a \cdot t^2)' = 2at$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε της εξίσωση της θέσης αυτής της άσκησης:

$$x(t) = 10 \cdot t$$

Αν παραγωγίσω, βρίσκω κατευθείαν την εξίσωση της ταχύτητας:

$$u(t) = [x(t)]' = (10t)' = 10$$

Και αν παραγωγίσω την εξίσωση της ταχύτητας, βρίσκω την εξίσωση της επιτάχυνσης:

$$a(t) = [u(t)]' = (10)' = 0$$

Α7 Ένας μοτοσυκλετιστής ξεκινά από την ηρεμία και κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση $a = 2 m/s^2$.

Να υπολογιστούν:

Α. Η ταχύτητά του μετά από 15s.

Β. Η απόσταση που διένυσε στο χρόνο αυτό.

Λύση:

Αρχικά θα κατασκευάσουμε τις εξισώσεις κίνησης και ταχύτητας.

Αφού το όχημα ξεκινά από την ηρεμία έχουμε ότι $u_0 = 0$. Ακόμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σημείο αναφοράς βρίσκεται στο σημείο όπου το όχημα ξεκινά την κίνηση του (δηλαδή $x_0 = 0$) και ότι το χρονόμετρο αυτή την στιγμή δείχνει $t_0 = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι το όχημα κινείται προς τα δεξιά με σταθερή επιτάχυνση, επομένως έχουμε ότι: $\alpha = +2 m/s^2$.

Η εξίσωση κίνησης για την ΕΟΜ κίνησης είναι:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2$$

και αφού αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές με τα κατάλληλα πρόσημα αν πρόκειται για διανυσματικά μεγέθη έχουμε:

$$x(t) = 0 + 0 \cdot (t - 0) + \frac{1}{2} 2 \cdot (t - 0)^2 \text{ ή}$$

$$x(t) = t^2 \quad (S.I.)$$

Για να βρούμε τώρα την εξίσωση της ταχύτητας αρκεί να παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση:

$$\upsilon(t) = [x(t)]' = 2t$$

Φυσικά, μπορούμε να πάρουμε και τον τύπο:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0)$$

Να αντικαταστήσουμε:

$$u(t) = 0 + 2 \cdot (t - 0) = 2t$$

και όπως βλέπετε, καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα και την θέση του οχήματος μετά από Δt=15s έχουμε $\Delta t = t - t_0$, αντικαθιστούμε: $15 = t - 0$ ή $t = 15 s$. Δηλαδή θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα και την θέση την χρονική στιγμή $t = 15 s$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση ταχύτητας:

$$u(t) = 2t \text{ ή } \upsilon(15) = 2 \cdot 15 = 30 m/s$$

και στην εξίσωση της κίνησης:

$$x(t) = t^2 \text{ ή } x(15) = 15^2 = 225 m$$

Δηλαδή την χρονική στιγμή $t = 15 s$ το όχημα βρίσκεται στο σημείο του δρόμου που αναγράφει τον αριθμό 225m δεξιά από το σημείο αναφοράς και τρέχει με ταχύτητα 30m/s προς τα δεξιά.

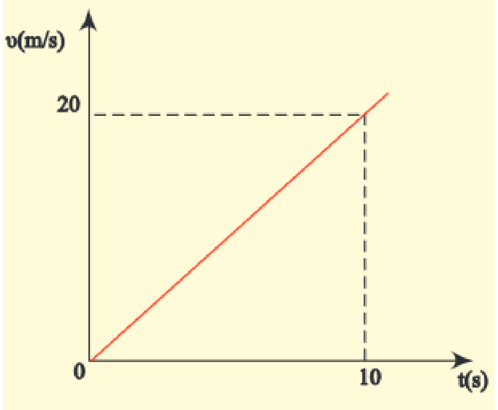
Για να βρούμε την απόσταση έχουμε:

$$\Delta x = x - x_0 = 225 - 0 = 225 m$$

και

$$s = |\Delta x| = 225 m$$

Α8 Στην εικόνα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για ένα κινητό που κάνει ευθύγραμμη κίνηση



Σχήμα 15. Γραφική παράσταση της **ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο.**

Να υπολογίσετε:

Α. Το διάστημα που διένυσε το κινητό σε χρόνο 10s.

Β. Το διάστημα που διένυσε το κινητό στο 2° δευτερόλεπτο της κινήσής του.

Λύση:

(Α) Από το εμβαδόν που βρίσκεται μεταξύ της γραμμής του διαγράμματος και τον οριζόντιο άξονα των χρόνων, αλλά και μεταξύ των κατακόρυφων ευθειών που ορίζονται από τις κατάλληλες χρονικές στιγμές, βρίσκουμε το διάστημα και με λίγο περισσότερη προσοχή μπορούμε να υπολογίσουμε και την μετατόπιση.

Το εμβαδόν (εμβαδόν τριγώνου) σε αυτή την γραφική παράσταση μεταξύ των χρόνων $t_0=0$ και $t=10\,s$ είναι ίσο με:

$$E=\frac{1}{2}\cdot Βάση\cdot Υψος=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20=100$$

Το εμβαδόν αυτό είναι ίσο με το διάστημα που έχει κάνει το όχημα. Δηλαδή:

$$s=100\,m$$

Ακόμα, αν σκεφτούμε ότι το όχημα κινείται προς μία κατεύθυνση, ότι κινείται συνεχώς προς τα δεξιά αφού η ταχύτητα πάντα θετική, συνάγουμε ότι το μέτρο της μετατόπισης είναι ίσο με το διάστημα και ότι η κατεύθυνση της μετατόπισης είναι προς τα δεξιά (θετική). Επομένως:

$$\Delta x=+100\,m$$

(Β) Το δεύτερο δευτερόλεπτο της κίνησης είναι μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_0=1\,s$ και $t=2\,s$.

Από την γραφική παράσταση διαλέγουμε δύο σημεία και γράφουμε τις συντεταγμένες:

$$(t_0,u_0)=(0,0) \text{ και } (t,u)=(10,20)\,.$$

Από τον τύπο $εφ(φ)=\frac{u-u_0}{t-t_0}$ υπολογίζουμε την κλίση:

$$εφ(φ)=\frac{20-0}{10-0}=2$$

Η κλίση αυτή σε ένα διάγραμμα u(t) είναι ίση με την επιτάχυνση του οχήματος, δηλαδή:

$$α=+2\,m/s^2$$

Αρχικά θα κατασκευάσουμε την εξίσωση της ταχύτητας, αφού $u_0=0$, $t_0=0$, $a=2\,m/s^2$.

Θα πάρουμε τον τύπο:

$$\vec{u}=\vec{u}_0+\vec{a}\cdot(t-t_0)$$

και θα αντικαταστήσουμε:

$$u(t)=0+2(t-0) \text{ ή}$$

$$u(t)=2t \quad (S.I.)$$

Επομένως, τις χρονικές στιγμές $t_0=1\,s$ και $t=2\,s$ το όχημα τρέχει με ταχύτητες:

$u(1)=2\,m/s$ και $u(2)=4\,m/s$

Επομένως για να βρούμε το διάστημα αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του οριζόντιου άξονα αλλά και μεταξύ των κατακόρυφων που περνάνε από τις χρονικές στιγμές $t_0=1\,s$ και $t=2\,s$.

Το εμβαδόν (εμβαδόν τραπεζίου) αυτό είναι:

$$E=\frac{1}{2}(Μεγάλη\,Βάση+Μικρή\,Βάση)\cdot Υψος$$

και αφού αντικαταστήσουμε:

$$E=\frac{1}{2}(2+4)\cdot 1=3$$

Επομένως το διανυθέν διάστημα είναι ίσο με

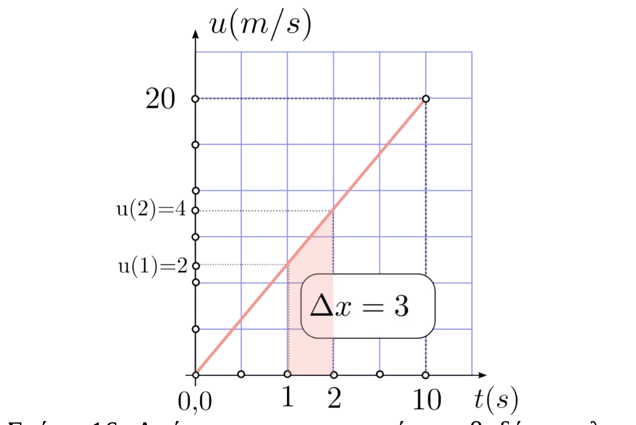
$$s=3\,m$$

και η μετατόπιση είναι

$$\Delta x=+3\,m$$

Ένας **δεύτερος τρόπος** για να υπολογίσουμε αυτό το διάστημα είναι να υπολογίσουμε αρχικά την εξίσωση της κίνησης:

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{u}_0\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot(t-t_0)^2$$



Σχήμα 16. Από το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν υπολογίζουμε το διάστημα ή την μετατόπιση του οχήματος. Προσοχή η κλίμακα και των δύο αξόνων έχει αλλοιωθεί για την καλύτερη παρουσίαση του θέματος.

Αφού αντικαταστήσουμε:

$$\vec{x}=0+0\cdot(t-0)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(t-0)^2 \text{ ή}$$

$$x(t)=t^2 \quad (S.I.)$$

Υποθέσαμε ότι την χρονική στιγμή $t_0=0$ το όχημα βρίσκεται στην θέση $x_0=0$.

Επομένως την χρονική στιγμή $1\,s$ το όχημα βρίσκεται στην θέση $x(1)=1\,m$, ενώ την χρονική στιγμή $2\,s$ βρίσκεται στην θέση $x(2)=4\,m$.

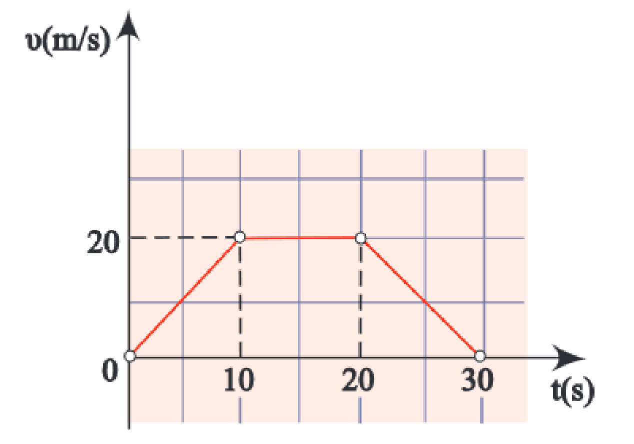
Επομένως από την χρονική στιγμή $1\,s$ έως την $2\,s$ έχει διανύσει μετατόπιση

$$\Delta x=4\,m-1\,m=+3\,m$$

και διάστημα

$$s=|\Delta x|=3\,m\,.$$

Α9 Η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο, στα πρώτα 30s της κίνησής του δίνεται από το διάγραμμα της εικόνας.



Σχήμα 17. Η γραφική παράσταση της άσκησης

Να υπολογιστούν:

Α. Το συνολικό διάστημα που διένυσε το κινητό.

Β. Η τιμή της μέσης ταχύτητας του κινητού.

Λύση:

Η κίνηση που εκτελεί το όχημα μπορεί να χωριστεί σε τρία τμήματα.

(α) σε μία ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνησης αφού παρατηρούμε ότι στο χρονικό διάστημα $t \in [0,10)$ η ταχύτητα αυξάνεται.

(β) σε μία ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στο διάστημα $t \in [10,20)$ αφού η ταχύτητα παραμένει σταθερή.

(γ) σε μία ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη στο χρονικό διάστημα $t \in [20,30]$ αφού η ταχύτητα ελαττώνεται.

Για να υπολογίσουμε το διάστημα αρκεί να βρούμε το εμβαδόν ανάμεσα στην γραφική παράσταση και τον άξονα των χρόνων και ανάμεσα στις κατακόρυφους που περνούν από τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0$ και $t = 30\,s$.

Από το εμβαδόν του τραπεζίου έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}(Μεγάλη\,Βάση + Μικρή\,Βάση) \cdot Ύψος$$

αντικαθιστούμε:

$$E = \frac{1}{2} \cdot (30+10) \cdot 20 = 400$$

Επομένως το διάστημα που έχει διανύσει το όχημα είναι ίσο με:

$$s = 400\,m$$

Σχετικά με την μετατόπιση αρκεί να σκεφτούμε ότι το όχημα κινείται συνεχώς προς την θετική κατεύθυνση, αφού η ταχύτητα είναι πάντα θετική, επομένως το μέτρο της μετατόπισης θα είναι ίσο με το διάστημα και η κατεύθυνση της μετατόπισης θα είναι θετική:

$$\Delta x = +400\,m$$

Για να υπολογίσουμε την μέση ταχύτητα παίρνουμε τον τύπο:

$$u_\mu = \frac{s}{\Delta t}$$

αντικαθιστούμε:

$$u_\mu = \frac{400}{30} = \frac{40}{3}\,m/s$$

A10 Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου σε μια ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon = 8 + 2t\,(\upsilon\,σε\,m/s,\, t\,σε\,s)$$

Να βρείτε το διάστημα που διένυσε το αυτοκίνητο από τη χρονική στιγμή 2s μέχρι τη χρονική στιγμή 4s.

Λύση:

Προς το παρόν έχουμε μελετήσει δύο ειδών κινήσεις:

(α) Την ΕΟΚ όπου η εξίσωση της ταχύτητας είναι της μορφής: $u(t) = const.$, δηλαδή στο δεύτερο μέλος του τύπου της συνάρτησης δεν εμφανίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή (ο χρόνος t).

(β) Την ΕΟΜ όπου η εξίσωση της ταχύτητας είναι της μορφής: $u(t) = a \cdot t + b$, όπου η μεγαλύτερη δύναμη όπου εμφανίζεται ο χρόνος (t) στο δεύτερο μέλος είναι η πρώτη. Δηλαδή είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Στην εξίσωση που μας δίνει η άσκηση παρατηρείστε ότι ο χρόνος είναι πρώτου βαθμού, δηλαδή σαν την περίπτωση (β) όπου το όχημα εκτελεί ΕΟΜ.

Συγκρίνοντας τις σχέσεις:

$$\upsilon(t) = u_0 + a \cdot (t - t_0)$$

και

$$\upsilon(t) = 8 + 2 \cdot t$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\upsilon_0 = +8\,m/s\,,\ a = +2\,m/s\,,\ t_0 = 0$$

υποθέτοντας ότι την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το όχημα βρίσκεται στο σημείο αναφοράς $x_0 = 0$ έχουμε ότι η εξίσωση της κίνησης είναι:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot (t - t_0)^2$$

και με αντικατάσταση:

$$x(t) = 0 + 8(t - 0) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (t - 0)^2 \ \text{ή}$$

$$x(t) = 8 \cdot t + t^2 (x\,σε\,m,\, t\,σε\,s)$$

Επομένως την χρονική στιγμή 2s το όχημα είναι στην θέση:

$$x(2) = 8 \cdot 2 + 2^2 = 20\,m$$

ενώ την χρονική στιγμή 4s είναι στην θέση:

$$x(4) = 8 \cdot 4 + 4^2 = 48\,m$$

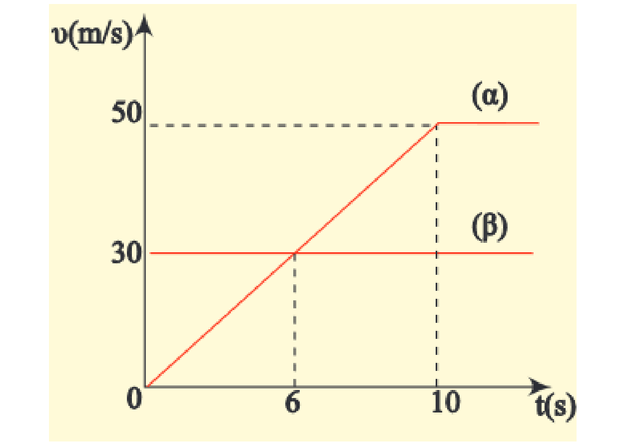
Επομένως η μετατόπιση σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι:

$$\Delta x = x(4) - x(2) = 48 - 20 = 28\,m$$

και το διάστημα:

$$s = |\Delta x| = 28\,m$$

A11 Δύο κινητά βρίσκονται στο ίδιο σημείο ευθύγραμμου δρόμου και ξεκινούν ταυτόχρονα. Στο διάγραμμα της εικόνας φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ταχύτητας- χρόνου για τα δύο αυτά κινητά.



Σχήμα 18. Η γραφική παράσταση της άσκησης

Να υπολογιστούν:

Α. Σε ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα των κινητών έχει την ίδια τιμή;

Β. Στα 10s πόσα m προηγείται το κινητό Β του κινητού Α;

Γ. Σε ποια χρονική στιγμή συναντώνται τα κινητά;

Λύση:

(Α) Παρατηρούμε ότι την χρονική στιγμή $t=6s$ και τα δύο οχήματα έχουν ίδια ταχύτητα:

$$u_A=u_B=+30m/s$$

(Β) Αρκεί να βρούμε τα αντίστοιχα εμβαδά που βρίσκονται κάτω από τις γραφικές παραστάσεις (α) και (β) και μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_0=0$ και $t=10s$:

$$E_a=\frac{1}{2}\cdot Βάση\cdot Ύψος$$

$$E_\alpha=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 50=250$$

και

$$E_\beta=Βάση\cdot Ύψος$$

$$E_\beta=10\cdot 30=300$$

Επομένως το όχημα Α έχει διανύσει 250 μέτρα ενώ το όχημα Β έχει 300 μέτρα. Άρα το όχημα Β προπορεύεται κατά 50m.

(Γ) Αν υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή $t_0=0$ και τα δύο οχήματα βρίσκονται στο σημείο αναφοράς $x_0=0$, έχουμε για το όχημα Β ότι:

$$x_\beta(t)=x_0+u_\beta\cdot(t-t_0)$$

$$x_\beta(t)=30\cdot t$$

Τώρα, για να κατασκευάσουμε την εξίσωση κίνησης του οχήματος Α πρέπει να σκεφτούμε λίγο πιο σύνθετα.

Το όχημα Α μέχρι την χρονική στιγμή 10s έχει διανύσει 250m και αρχίζει την ΕΟΚ από αυτήν την χρονική στιγμή $t_0=10s$ και μετά. Δηλαδή την χρονική στιγμή $t_0=10s$ το όχημα Α βρίσκεται στην θέση $x_0=250m$ και εκτελεί ΕΟΚ, επομένως:

$$x_\alpha(t)=x_0+u_\beta\cdot(t-t_0)$$

$$x_\alpha(t)=250+50(t-10)$$

Για να υπολογίσουμε τώρα σε πιο σημείο θα συναντηθούν πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$x_\alpha(t)=x_\beta(t)$$

$$250+50\cdot(t-10)=30\cdot t$$

$$50t-30t=500-250$$

$$20t=250$$

$$t=\frac{25}{2}s$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την θέση όπου έγινε η συνάντηση των δύο οχημάτων:

$$x_\alpha(12{,}5)=375m \text{ ή } x_\beta(12{,}5)=375m$$

Α12 Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Για να περάσει από δύο σημεία Α και Β που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d=200m$ χρειάζεται χρόνο $10s$. Αν η ταχύτητα του αυτοκινήτου τη στιγμή που περνά από το σημείο Β είναι $\upsilon_B=30m/s$ να βρεθούν:

Α. η ταχύτητά του όταν περνά από το σημείο Α και

Β. η επιτάχυνσή του.

Λύση:

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι το όχημα εκτελεί ΕΟΜ έχουμε τον τύπο:

$$\Delta\vec{x}=\vec{u}_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\Delta t^2$$

Έχουμε ότι $\Delta x_{A\to B}=d=200m$, $u_0=u_A$, και $\Delta t_{A\to B}=10s$, επομένως ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$200=u_A\cdot 10+\frac{1}{2}\cdot a\cdot 10^2 \text{ ή}$$

$$10u_A+50a=200 \text{ ή}$$

$$\upsilon_A+5a=20 \quad \underline{\text{Σχέση Ι}}$$

Λάβετε υπόψιν σας ότι τα διανυσματικά μεγέθη έχουν αντικατασταθεί με τα μέτρα και τα κατάλληλα πρόσημα αφού το όχημα κινείται πάνω σε ευθεία τροχιά.

Ενώ η εξίσωση της ταχύτητας είναι:

$$\vec{u}=\vec{u}_0+\vec{a}\cdot(t-t_0) \text{ ή}$$

$$u_B=u_A+a\cdot\Delta t \text{ ή}$$

$$30=u_A+a\cdot 10 \text{ ή}$$

$$u_A+10a=30 \quad \underline{\text{Σχέση ΙΙ}}$$

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζεται κάθε σύστημα της μορφής:

$$\begin{Bmatrix}\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\kappa\\ \gamma\cdot x+\delta\cdot y=\lambda\end{Bmatrix},\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$$

και μπορεί να λυθεί με τρεις αλγεβρικούς τρόπους. Εμείς θα δώσουμε την μέθοδο επίλυσης με την βοήθεια ενός παραδείγματος.

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix}1\cdot x-2\cdot y=6\\ 3\cdot x+4\cdot y=8\end{Bmatrix}$$

(Α) με την **μέθοδο των αντίθετων συντελεστών** διαλέγουμε αρχικά ένα άγνωστο, π.χ. τον y. Πολλαπλασιάζουμε τώρα τις εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς ώστε οι συντελεστές του αγνώστου που διαλέξαμε να γίνουν αντίθετοι. Δηλαδή θα πολλαπλασιάσουμε την πρώτη με τον αριθμό 2 και την δεύτερη με το 1.

$$\begin{Bmatrix}1\cdot x-2\cdot y=6 & (\cdot 2)\\ 3\cdot x+4\cdot y=8 & (\cdot 1)\end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix}2\cdot x-4\cdot y=12\\ 3\cdot x+4\cdot y=8\end{Bmatrix}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη:

$$5x+0=20 \text{ ή } x=4$$

Διαλέγουμε μία εξίσωση και αντικαθιστούμε την λύση που βρήκαμε:

$$x-2y=6 \text{ ή } 4-2y=6 \text{ ή } y=-1$$

(Β) με την **μέθοδο της αντικατάστασης**. Διαλέγουμε μία εξίσωση από τις δύο και την λύνουμε ως προς έναν άγνωστο, π.χ.

$$x-2y=6 \text{ ή } x=6+2y \quad \text{Σχέση 1}$$

Αντικαθιστούμε αυτή την σχέση στην άλλη εξίσωση:

$$3x+4y=8 \text{ ή } 3(6+2y)+4y=8 \text{ ή } y=-1$$

Αντικαθιστούμε αυτή την λύση στην σχέση 1:

$$x=6+2y \text{ ή } x=6+2\cdot(-1) \text{ ή } x=4$$

(Γ) με την **μέθοδο των οριζουσών** υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot4-(-2)\cdot3=10$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6 & -2\\ 8 & 4\end{vmatrix}=6\cdot4-(-2)\cdot8=40$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 6\\ 3 & 8\end{vmatrix}=1\cdot8-6\cdot3=-10$$

Επομένως,

$$x=\frac{D_x}{D}=4 \;\text{ και }\; y=\frac{D_y}{D}=-1$$

Λάβετε υπόψιν ότι η ορίζουσα ορίζεται ως:

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma$$

Επίσης για να έχει μοναδική λύση το σύστημα πρέπει $D\neq0$, αλλά στα προβλήματα αυτής της τάξης δεν θα αντιμετωπίσουμε συστήματα που είναι αδύνατα ή ταυτότητες.

Στα πλαίσια αυτής της άσκησης έχουμε καταλήξει στους παρακάτω δύο τύπους που αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{Bmatrix} u_A+5\,a=20\\ u_A+10\,a=30\end{Bmatrix}$$

Θα λύσουμε αυτό το σύστημα με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με -2 και την δεύτερη με 1.

$$\begin{Bmatrix} -2u_A-10\,a=-40\\ u_A+10\,a=30\end{Bmatrix}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη:

$$-u_A+0=-10 \;\text{ ή }\; u_A=10\,m/s$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση:

$$10+5\alpha=20 \;\text{ ή }\; \alpha=2\,m/s^2$$

A13 Αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0=72\,km/h$. Ξαφνικά σε απόσταση $50\,m$ ο οδηγός βλέπει εμπόδιο. Ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού είναι $t_1=0{,}7\,s$ (ο χρόνος από τη στιγμή που βλέπει το εμπόδιο μέχρι να πατήσει το φρένο). Να εξετάσετε αν αποφεύγεται η σύγκρουση του αυτοκινήτου με το εμπόδιο. Η επιβράδυνση που προκαλούν τα φρένα είναι $10\,m/s^2$.

Λύση:

Έστω οριζόντιο σύστημα αναφοράς με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά. Έστω ότι το όχημα την χρονική στιγμή $t_0=0$ βρίσκεται στο σημείο αναφοράς $x_0=0$ και κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $u_0=+72\,Km/h=20\,m/s$ και επιβραδύνεται με $\alpha=-10\,m/s^2$.

Για να μετατρέψουμε μία μονάδα κάνουμε αντικατάσταση, π.χ.

$$72\frac{km}{h}=72\frac{1000\,m}{3600\,s}=20\,m/s$$

ή αντίστροφα:

$$20\frac{m}{s}=20\frac{\frac{1}{1000}km}{\frac{1}{3600}h}=72\,km/h$$

Το όχημα μέχρι ο οδηγός να πατήσει το φρένο και να ασκήσει επιβράδυνση κινείται με ΕΟΚ, επομένως

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{u}\cdot(t-t_0) \;\text{ ή }$$

$$x(t)=0+20(t-0) \;\text{ ή }$$

$$x(t)=20\,t\,,\; t\in[0{,}0.7\,s]$$

Επομένως την χρονική στιγμή 0,7s βρίσκεται στην θέση $x(0{,}7)=14\,m$

Από αυτή την χρονική στιγμή και μετά το όχημα επιβραδύνεται:

Αρχικά θα κατασκευάσουμε την εξίσωση ταχύτητας:

$$\vec{u}=\vec{u}_0+\vec{a}\cdot(t-t_0) \;\text{ ή }$$

$$u(t)=20-10(t-0.7)$$

Από αυτή την σχέση θα υπολογίσουμε πότε σταματάει το όχημα λύνοντας την εξίσωση:

$$u(t)=0 \;\text{ ή }$$

$$20-10(t-0.7)=0 \;\text{ ή }$$

$$t=2{,}07\,s$$

Δηλαδή την χρονική στιγμή $2{,}07\,s$ το όχημα σταματάει.

Επομένως το πεδίο ορισμού της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι το $t\in[0.7\,s\,,2.07\,s]$

Για να κατασκευάσουμε την εξίσωση κίνησης που θα μας φανεί χρήσιμη έχουμε: (προσέξτε ότι τώρα το όχημα ήδη βρίσκεται στην θέση $x_0=14\,m$, έχει ταχύτητα $20\,m/s$ και επιβράδυνση $\alpha=-10\,m/s^2$)

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{u}_0\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot(t-t_0)^2 \;\text{ ή }$$

$$x(t)=14+20(t-0.7)-\frac{1}{2}\cdot10\cdot(t-0.7)^2 \;\text{ ή }$$

$$x(t)=14+20(t-0.7)-5(t-0.7)^2, t\in[0.7\,,2.07]$$

Θα υπολογίσουμε τώρα σε ποιο σημείο βρίσκεται το όχημα την χρονική στιγμή που αυτό σταματά, δηλαδή την χρονική στιγμή $t=2{,}07\,s$:

$$x(2.07)=14+20(2.07-0.7)-5(2.07-0.7)^2 \;\text{ ή }$$

$$x(2.07)=34\,m$$

Δηλαδή το όχημα βρίσκεται στην θέση 34m, ενώ το εμπόδιο στην θέση 50m. Δηλαδή αποφεύγεται η σύγκρουση διότι το όχημα σταματάει 16m νωρίτερα από την θέση του εμποδίου.

Συνοψίζοντας, υπολογίσαμε την συνάρτηση της θέσης ως προς τον χρόνο:

$$x(t)=\begin{cases}20\,t\,, & t\in[0\,,0.7)\\ 14+20(t-0.7)-5(t-0.7)^2, & t\in[0.7\,,2.07]\end{cases}$$

και η εξίσωση της ταχύτητας:

$$u(t)=\begin{cases}20\,, & t\in[0\,,0.7)\\ 20-10(t-0.7), & t\in[0.7\,,2.07]\end{cases}$$

Β- τρόπος επίλυσης

Το όχημα εκτελεί δύο διαδοχικές κινήσεις.

Στην αρχή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά και σε χρόνο $\Delta t=0.7\,s$ έχει διανύσει

$$\Delta x=u\cdot\Delta t=20\cdot0.7=14\,m$$

Έπειτα εκτελεί ΕΟΜ κίνηση. Μέχρι να σταματήσει χρειάζεται χρόνος:

$$\vec{u}=\vec{u}_0+\vec{a}\cdot\Delta t \text{ ή}$$

$$0=20-10\cdot\Delta t \text{ ή}$$

$$\Delta t=2s$$

Σε αυτά τα δύο δευτερόλεπτα έχει διανύσει:

$$\Delta x=u\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t^2$$

$$\Delta x=20\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2^2=20m$$

Επομένως συνολικά έχει διανύσει 34 μέτρα και έτσι αποφεύγει την σύγκρουση αφού το εμπόδιο είναι στα 50 μέτρα.

Α14 Τραίνο μήκους $L=70m$ περνά από γέφυρα μήκους $s=55m$. Το τραίνο έχει αρχική ταχύτητα $\upsilon_0=20m/s$ και τη στιγμή που φτάνει στην γέφυρα αρχίζει να επιταχύνεται ομαλά με $\alpha=2m/s^2$. Να βρείτε επί πόσο χρόνο βρίσκεται τμήμα του τρένου πάνω στη γέφυρα.

Λύση:

Την πρώτη φορά που κάποιο τμήμα του τραίνου εισέρχεται στην γέφυρα είναι όταν η "μύτη" του τραίνου εισέρχεται στην γέφυρα. Έστω ότι αυτό γίνεται την χρονική στιγμή t_0.

Την τελευταία στιγμή που κάποιο τμήμα του είναι ακόμα πάνω στην γέφυρα είναι όταν η "ουρά" του εξέρχεται από την γέφυρα. Βλέπε σχήμα 3.

Έστω ότι το σημείο που ξεκινάει η γέφυρα είναι το σημείο αναφοράς $x_0=0$.

Η ΕΟΜ κίνηση ξεκινάει όταν το σημείο Α, την χρονική στιγμή $t_0=0$ εισέρχεται στην γέφυρα στην θέση $x_0=0$.

Το σημείο Α θα μετατοπιστεί για: (βλέπε άσκηση 2)

$$\Delta x=L+s=125m$$

Επομένως

$$\Delta x=u_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t^2 \text{ ή}$$

$$125=20\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\Delta t^2 \text{ ή}$$

$$\Delta t^2+20\cdot\Delta t-125=0$$

Μία εξίσωση της μορφής:

$$\alpha\cdot t^2+\beta\cdot t+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$$

ονομάζεται **εξίσωση δεύτερου βαθμού** και για να την λύσουμε υπολογίζουμε αρχικά την **διακρίνουσα** από τον τύπο:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$$

και στην συνέχεια:

(α) αν $\Delta>0$ τότε έχουμε **δύο άνισες λύσεις** (ρίζες) που υπολογίζονται από τον τύπο:

$$t_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

(β) αν $\Delta=0$ τότε έχουμε **μία διπλή ρίζα** που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$t=\frac{-\beta}{2a}$$

(γ) ενώ αν $\Delta<0$ τότε αυτή η εξίσωση **είναι αδύνατη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών**. Έχει όμως μιγαδικές λύσεις αλλά στα πλαίσια της φυσικής του Λυκείου δεν θα τις υπολογίζουμε.

Επομένως η εξίσωση της άσκησης είναι μία εξίσωση δευτέρου βαθμού με μεταβλητή την Δt. Έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(20)^2-4\cdot 1\cdot(-125)=900>0$$

Επομένως αφού Δ>0 υπάρχουν δύο άνισες λύσεις που θα τις υπολογίζουμε από τους τύπους:

$$t_1=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-20-\sqrt{900}}{2\cdot 1}=-25s$$

η οποία είναι μη αποδεκτή αφού ο χρόνος δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. Πρέπει πάντα $t\geq 0$.

$$t_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-20+\sqrt{900}}{2\cdot 1}=5s$$

η οποία είναι αποδεκτή λύση και έτσι το τραίνο χρειάζεται 5s για να διανύσει την γέφυρα.

Α15 Οι εξισώσεις κίνησης δύο οχημάτων τα οποία κινούνται κατά μήκος του προσανατολισμένου άξονα $O\chi$ είναι:

$x_1=10t$ και $x_2=4t^2$ στο $S.I.$

Α. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που τα κινητά συναντώνται.

Β. Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα, ταχύτητας - χρόνου και διαστήματος-χρόνου.

Λύση:

Όπως βλέπετε οι εξισώσεις κίνησης των δύο οχημάτων είναι

$$x_1(t)=10\cdot t \text{ και } x_2(t)=4\cdot t^2$$

Όταν τα δύο οχήματα συναντιούνται έχουμε ότι:

$$x_1(t)=x_2(t) \text{ ή}$$

$$10t=4t^2 \text{ ή}$$

$$4t^2-10t=0$$

Όταν σε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού:

$$\alpha\cdot t^2+\beta\cdot t+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$$

έχουμε

(α) β=0 τότε η εξίσωση ονομάζεται ελλιπής και λύνεται (με $\alpha\cdot\gamma\leq 0$) ως εξής:

$$\alpha\cdot t^2+\gamma=0\Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{-\gamma}{a}},$$

ενώ αν $\alpha\cdot\gamma>0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις.

(β) γ=0 τότε ονομάζεται ελλιπής και λύνεται ως εξής:

$$\alpha\cdot t^2+\beta\cdot t=0\Rightarrow t\cdot(\alpha\cdot t+\beta)=0$$

$$t=0 \text{ ή } t=\frac{-\beta}{\alpha}$$

αφού όταν

$$\kappa\cdot\lambda=0\Leftrightarrow\kappa=0\,ή\,\lambda=0$$

Επομένως έχουμε με κοινό παράγοντα:

$$2t(2t-5)=0$$

και λύνουμε:

$$t_1=0$$

που την απορρίπτουμε γιατί αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή όπου τα κινητά ξεκίνησαν να κινούνται μαζί, και

$$t_2=2{,}5\,s$$

την οποία θεωρούμε αποδεκτή.

Το διάστημα που έχει διανύσει κάθε όχημα δίνεται από τον τύπο:

$$s=|\Delta x|=|x-x_0|$$

Επομένως για το πρώτο όχημα έχουμε:

$$s_1(t)=|10t-0|=10t\,,t\geq 0$$

και

$$s_2(t)=|4t^2-0|=|4t^2|=4t^2\,,t\geq 0$$

Θα κατασκευάσουμε αυτές τις γραφικές παραστάσεις από την χρονική στιγμή $t_0=0$ μέχρι την χρονική στιγμή της συνάντησης, δηλαδή $t=2.5s$

(α) Η γραφική παράσταση $s_1(t)$ είναι **ευθεία** και αρκούν μόνο το αρχικό και τελικό σημείο:

$$s_1(0)=0 \text{ και } s_1(2.5)=25\,m$$

δηλαδή τα διατεταγμένα ζεύγη:

$$(0{,}0) \text{ και } (2.5\,,25)$$

(β) Η γραφική παράσταση $s_2(t)$ είναι **παραβολή**. Βρίσκουμε το αρχικό και το τελικό σημείο:

$$s_2(0)=0 \text{ και } s_2(2.5)=25\,m$$

δηλαδή τα διατεταγμένα ζεύγη:

$$(0{,}0) \text{ και } (2.5\,,25)$$

Προσοχή: δεν θα έχουμε πάντα τα ίδια διατεταγμένα ζεύγη.

Βρίσκουμε το κέντρο της παραβολής:

$$K\left(-\frac{\beta}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)=K(0{,}0)$$

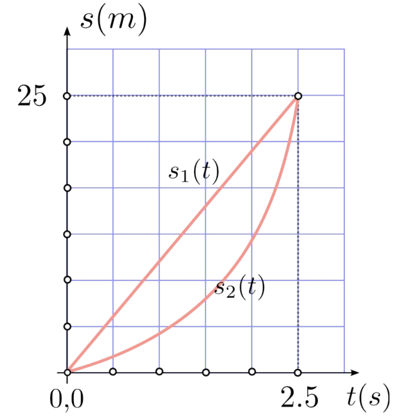
και την διπλή ρίζα:

$$t=0$$

που είναι το σημείο που τέμνει τον οριζόντιο άξονα

και αφού $\alpha=4>0$ σχεδιάζουμε το τμήμα της, σύμφωνα και με το σχήμα 1 (περίπτωση β).

Παρακάτω βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις σε κοινό σύστημα αξόνων.



Σχήμα 19. Η γραφική παράσταση του διαστήματος των δύο κινητών σε κοινό σύστημα αξόνων.

Η ταχύτητα των δύο οχημάτων δίνεται από τους τύπους:

$$u_1(t)=10\,,t\geq 0$$

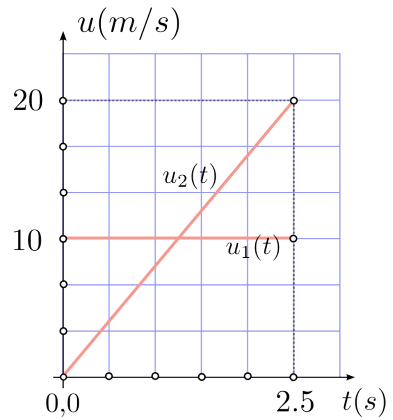
και

$$u_2(t)=8t\,,t\geq 0$$

Λάβετε υπόψιν ότι την ταχύτητα $u_2(t)$ την υπολόγισα χάριν συντομίας με την πράξη της παραγώγισης. Βλέπε το ένθετο στην άσκηση 6, δηλαδή:

$$u_2(t)=[x_2(t)]'=(4t^2)'=4\cdot 2t=8t$$

(α) η εξίσωση $u_1(t)$ είναι **ευθεία**, παράλληλη στον οριζόντιο άξονα και τα δύο διατεταγμένα ζεύγη είναι:



Σχήμα 20. Η γραφική παράσταση της ταχύτητας των δύο κινητών σε κοινό σύστημα αξόνων.

$$u_1(0)=10 \text{ και } u_1(2.5)=10 \text{ ή}$$

$$(0{,}10) \text{ και } (2.5{,}10)$$

(β) η εξίσωση $u_2(t)$ είναι και αυτή ευθεία με διατεταγμένα ζεύγη:

$$u_2(0)=0 \text{ και } u_2(2.5)=20 \text{ ή}$$

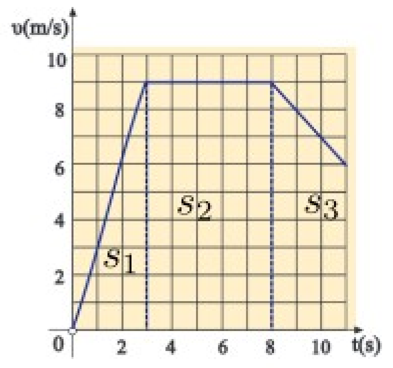
$$(0{,}0) \text{ και } (2.5{,}20)$$

Παρακάτω βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις σε κοινό σύστημα αξόνων.

A16 Η κίνηση ενός δρομέα δίνεται προσεγγιστικά από το παρακάτω διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου. Να υπολογίσετε:

Α. τη μέση ταχύτητα του δρομέα και

Β. την επιτάχυνσή του, όπου η κίνηση είναι μεταβαλλόμενη.



Σχήμα 21. Η γραφική παράσταση της άσκησης.

Λύση:

Το όχημα εκτελεί τρεις διαδοχικές κινήσεις.

(α) στο χρονικό διάστημα $t\in[0{,}3)$, εκτελεί ΕΟΜ. Συγκεκριμένα ξεκινά από την ακινησία και επιταχύνεται σταθερά, μέχρις ότου αναπτύξει ταχύτητα ίση με $9\,m/s$. Η κατεύθυνση της ταχύτητας είναι θετική.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την σταθερή επιτάχυνση από την κλίση αυτής της ευθείας. Παίρνουμε δύο διατεταγμένα ζεύγη από την ευθεία, π.χ. τα:

$$(t_1,u_1)=(0,0) \text{ και } (t_2,u_2)=(3,9)$$

και υπολογίζουμε την κλίση:

$$\alpha_1=\varepsilon\varphi(\varphi)=\frac{u_2-u_1}{t_2-t_1}=6\,m/s^2$$

και από το αντίστοιχο εμβαδόν το διάστημα:

$$s_1=\frac{27}{2}m \text{ , εμβαδόν τριγώνου.}$$

Η μετατόπιση σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι θετική αφού το όχημα κινείται συνεχώς προς το δεξιά και το μέτρο της μετατόπισης είναι ίσο με το διάστημα, δηλαδή:

$$\Delta x_1=\frac{27}{2}m$$

(β) στο χρονικό διάστημα $t\in[3,8)$ το όχημα εκτελεί ΕΟΚ. Εργαζόμαστε αναλόγως και βρίσκουμε ότι:

$$\alpha_2=0\,,\ s_2=45\,m \text{ και } \Delta x_2=45\,m$$

(γ) στο χρονικό διάστημα $t\in[8,11]$ το όχημα εκτελεί ΕΟΜ και μάλιστα αρχικά έχει ταχύτητα μέτρου $9\,m/s^2$ προς την θετική κατεύθυνση και μετά ελαττώνει την ταχύτητά του με σταθερή επιβράδυνση.

Για να υπολογίσουμε την επιβράδυνση παίρνουμε δύο σημεία:

$$(t_1,u_1)=(8,9) \text{ και } (t_2,u_2)=(11,6)$$

και υπολογίζουμε την κλίση:

$$\alpha_3=\varepsilon\varphi(\varphi)=\frac{u_2-u_1}{t_2-t_1}=\frac{-3}{3}=-1\,m/s^2$$

και από το αντίστοιχο εμβαδόν το διάστημα:

$$s_3=\frac{45}{2}m \text{ , εμβαδόν τραπεζίου.}$$

Η μετατόπιση σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι θετική αφού το όχημα κινείται συνεχώς προς το δεξιά και το μέτρο της μετατόπισης είναι ίσο με το διάστημα, δηλαδή:

$$\Delta x_3=\frac{45}{2}m$$

Επομένως το συνολικό διάστημα είναι:

$$s_{ολ}=\frac{27}{2}+\frac{90}{2}+\frac{45}{2}=\frac{162}{2}=81\,m$$

και η μέση ταχύτητα για το συνολικό χρονικό διάστημα $\Delta t_{ολ}=11\,s$ είναι:

$$u_\mu=\frac{s_{ολ}}{\Delta t_{ολ}}=\frac{81}{11}m/s$$

A17 Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_0=10\,m/s$ και ο οδηγός κάνοντας χρήση των φρένων προκαλεί στο αυτοκίνητο σταθερή επιβράδυνση $\alpha=2\,m/s^2$.

Α. Μετά από πόσο χρόνο η ταχύτητα του αυτοκινήτου θα υποδιπλασιαστεί και πόσο διάστημα θα έχει διανύσει στο χρόνο αυτό;

Β. Για πόσο χρόνο θα κινηθεί το αυτοκίνητο με τη σταθερή αυτή επιβράδυνση και πόσο διάστημα θα διανύσει;

Λύση:

Αν υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή $t_0=0$ που ο οδηγός κάνει χρήση των φρένων το όχημα βρίσκεται στην θέση $x_0=0$ (σημείο αναφοράς).

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι (το όχημα εκτελεί ΕΟΜ):

$$\vec{u}=\vec{u}_0+\vec{a}\cdot(t-t_0) \text{ ή}$$

$$u(t)=10-2\cdot(t-0) \text{ ή}$$

$$u(t)=10-2t$$

Την χρονική στιγμή που η ταχύτητα θα υποδιπλασιαστεί είναι:

$$u(t)=\frac{u_0}{2} \text{ ή}$$

$$10-2t=5 \text{ ή } t=2.5\,s$$

Επομένως το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το όχημα μέχρι να υποδιπλασιαστεί η ταχύτητα του είναι:

$$\Delta t=t-t_0=2.5-0=2.5\,s$$

Ενώ την χρονική στιγμή που σταματάει είναι:

$$u(t)=0 \text{ ή}$$

$$10-2t=0 \text{ ή } t=5\,s$$

και το χρονικό διάστημα μέχρι να σταματήσει είναι:

$$\Delta t=t-t_0=5-0=5\,s$$

Σε αυτό το χρονικό διάστημα το όχημα θα μετατοπιστεί κατά:

$$\Delta x=u_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}a\,\Delta t^2 \text{ ή}$$

$$\Delta x=10\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5^2=25\,m$$

Επομένως και το διάστημα θα είναι:

$$s=|\Delta x|=25\,m$$

A18 Ένα αυτοκίνητο και μια μοτοσυκλέτα είναι ακίνητα στην αρχή μιας αγωνιστικής πίστας. Το αυτοκίνητο ξεκινάει κινούμενο με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_1=1{,}6\,m/s^2$ και 4 δευτερόλεπτα κατόπιν, ξεκινάει ο μοτοσυκλετιστής ο οποίος καταδιώκει το αυτοκίνητο με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_2=2{,}5\,m/s^2$.

Α. Μετά από πόσο χρόνο, από το ξεκίνημα του αυτοκινήτου, ο μοτοσυκλετιστής θα φτάσει το αυτοκίνητο και τι διάστημα θα έχουν διανύσει μέχρι τότε;

Β. Πόση είναι η ταχύτητα κάθε οχήματος τη στιγμή της συνάντησης και πόση η μέση ταχύτητα με την οποία κινήθηκε μέχρι τότε το αυτοκίνητο;

Γ. Να κάνετε για το αυτοκίνητο τα διαγράμματα $\upsilon=f(t)$ και $s=f(t)$.

Λύση:

Έστω ότι και τα δύο οχήματα την χρονική στιγμή $t_0=0$ βρίσκονται στη θέση $x_0=0$ (σημείο αναφοράς).

Το αυτοκίνητο ξεκινάει την χρονική στιγμή $t_0^{(a)}=0$ ενώ η μοτοσυκλέτα την χρονική στιγμή $t_0^{(\mu)}=4\,s$.

Και τα δύο οχήματα είναι ακίνητα αρχικά:

$u_0^{(a)}=0$ και $u_0^{(\mu)}=0$

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$x_a(t)=x_0^{(a)}+u_0^{(a)}(t-t_0^{(a)})+\frac{1}{2}a_1(t-t_0^{(a)})^2 \text{ ή}$$

$$x_a(t)=0+0(t-0)+\frac{1}{2}1.6(t-0)^2 \text{ ή}$$

$$x_a(t)=0.8t^2, t\geq 0 \quad \underline{\text{Σχέση (ι)}}$$

και για την μοτοσυκλέτα:

$$x_\mu(t)=x_0^{(\mu)}+u_0^{(\mu)}(t-t_0^{(\mu)})+\frac{1}{2}a_2(t-t_0^{(\mu)})^2 \text{ ή}$$

$$x_\mu(t)=0+0(t-4)+\frac{1}{2}2.5(t-4)^2 \text{ ή}$$

$$x_\mu(t)=1.25(t-4)^2, t\geq 4s \quad \underline{\text{Σχέση (ιι)}}$$

Τα δύο οχήματα συναντιούνται όταν:

$$x_a(t)=x_\mu(t) \text{ ή}$$

$$0.8t^2=1.25(t-4)^2 \text{ ή}$$

$$0.45\cdot t^2-10\cdot t+20=0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα:

$$\Delta=(-10)^2-4\cdot 0.45\cdot 20=64>0$$

Δηλαδή έχει δύο άνισες ρίζες:

$$t_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2\cdot 0.45} \text{ ή}$$

$$t_1\approx 2.22s$$

η οποία είναι μη αποδεκτή, διότι η μοτοσυκλέτα δεν έχει αρχίσει ακόμα να κινείται. Αυτή αρχίζει να κινείται από τα 4s και μετά. Επομένως είναι αδύνατο να έχουν συναντηθεί.

Η δεύτερη λύση είναι:

$$t_2=20s$$

που είναι αποδεκτή.

Για να υπολογίσουμε την μετατόπιση έχουμε:

$$\Delta x_a(t)=x_a-x_0^{(a)}=0.8t^2, t\geq 0 \text{ και}$$

$$\Delta x_\mu(t)=x_\mu-x_0^{(\mu)}=1.25(t-4)^2, t\geq 4s$$

και μετά υπολογίζουμε το διάστημα:

$$s_a(t)=|\Delta x_a|=0.8t^2, t\geq 0 \text{ και}$$

$$s_\mu(t)=|\Delta x_\mu|=1.25(t-4)^2, t\geq 4s$$

Επομένως την χρονική στιγμή 20s όπου ο μοτοσικλετιστής φτάνει το αμάξι έχει διατρέξει διάστημα ίσο με:

$$s_\mu(20)=1.25(20-4)^2=320m$$

Φυσικά το ίδιο διάστημα έχει διατρέξει και το αμάξι.

Για να υπολογίσουμε την εξίσωση της ταχύτητας μπορούμε να παραγωγίσουμε:

$$u_a(t)=[u_a(t)]'=(0.8t^2)'=0.8\cdot 2\cdot t=1.6\cdot t, t\geq 0$$

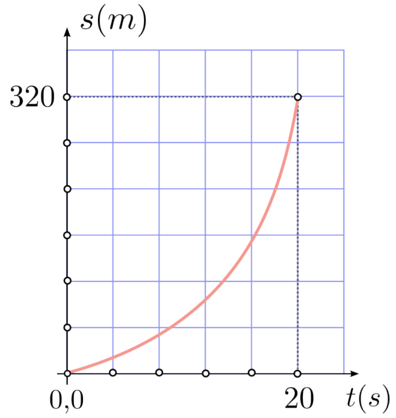
και

$$\begin{aligned} u_\mu(t) &=[x_\mu(t)]' \\ &=(1.25(t-4)^2)' \\ &=1.25\cdot 2\cdot(t-4)\cdot(t-4)' \\ &=2.5(t-4), t\geq 4s \end{aligned}$$

Μπορούμε να καταλήξουμε στα ίδια αποτελέσματα και με τον τύπο:

$$\vec{u}=\vec{u}_0+\vec{a}\cdot(t-t_0)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την ταχύτητα με την οποία κινείται κάθε όχημα την χρονική στιγμή των $20s$.



Σχήμα 22. Η γραφική παράσταση του διαστήματος του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με τον χρόνο.

$$u_a(20)=1.6\cdot 20=32m/s \text{ και}$$

$$u_\mu(20)=2.5(20-4)=40m/s$$

Για να υπολογίσουμε την μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου θα πάρουμε τον τύπο:

$$u_{μέση}^{(\alpha)}=\frac{s_a(20)}{\Delta t_a} \text{ ή}$$

$$u_\mu^{(\alpha)}=\frac{320}{20-0}=16m/s$$

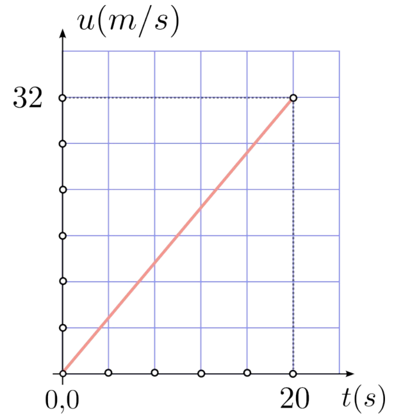
ενώ η μέση ταχύτητα της μοτοσυκλέτας είναι:

$$u_{μέση}^{(\mu)}=\frac{s_\mu(20)}{\Delta t_\mu}=\frac{320}{20-4}=20m/s$$

Για να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας και του διαστήματος για το αυτοκίνητο θα πάρουμε τις προηγούμενες σχέσεις:

$$s_a(t)=0.8t^2, t\geq 0 \text{ και}$$

$$u_a(t)=1.6\cdot t, t\geq 0$$



Σχήμα 23. Η γραφική παράσταση της ταχύτητας του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με τον χρόνο.

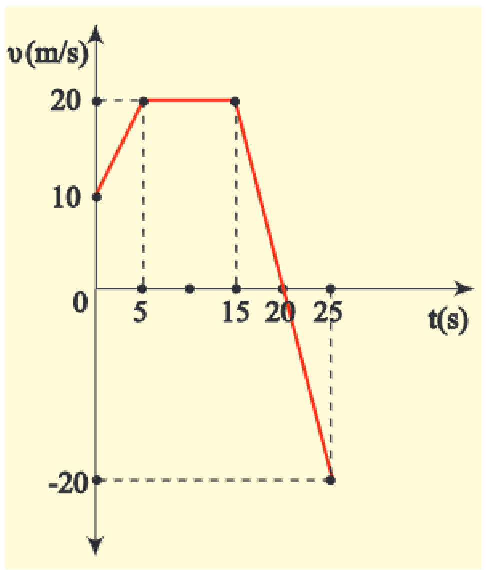
Θα κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις στο χρονικό διάστημα $t\in[0,20s]$.

Η πρώτη είναι τμήμα παραβολής με κορυφή το σημείο $K(0,0)$, $\alpha=0.8>0$ και διπλή ρίζα $t=0$. Το αρχικό και τελικό σημείο είναι τα $(0,0)$ και $(20,320)$.

Η δεύτερη είναι ευθεία με αρχικό και τελικό σημείο τα $(0,0)$ και $(20,32)$

Στο σχήμα 22 βλέπουμε την γραφική παράσταση του διαστήματος του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με τον χρόνο ενώ στο σχήμα 23 βλέπουμε την γραφική παράσταση της ταχύτητας του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με τον χρόνο.

A19 Στο διάγραμμα αποδίδεται γραφικά η ταχύτητα ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 24. Η γραφική παράσταση της άσκησης.

Α. Να περιγράψετε την κίνηση του κινητού έως τη χρονική στιγμή 25s.

Β. Να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του, από τη χρονική στιγμή μηδέν έως τη χρονική στιγμή 5s.

Γ. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει το κινητό και τη μετατόπισή του για τα 25s της κίνησής του.

Δ. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του κινητού στη διάρκεια των 25s.

Λύση:

Υποθέτουμε αρχικά ότι το όχημα την χρονική στιγμή $t_0=0$ βρίσκεται στην θέση $x_0=0$ (στο σημείο αναφοράς).

Θα χωρίσουμε την κίνηση του οχήματος σε τέσσερις διαδοχικές κινήσεις:

(α) στο χρονικό διάστημα $t\in[0,5s)$ το όχημα εκτελεί ΕΟΜ κίνηση. Στο διάγραμμα παρατηρούμε ότι το όχημα ξεκινάει την κίνησή του με αρχική ταχύτητα 10m/s και μετά αυξάνει την ταχύτητά με σταθερό ρυθμό (σταθερή επιτάχυνση) που μπορούμε να την υπολογίσουμε από την κλίση:

Παίρνουμε δύο σημεία:

$$(t_1,u_1)=(0,10) \text{ και } (t_2,u_2)=(5,20)$$

και από τον παρακάτω τύπο υπολογίζουμε την επιτάχυνση:

$$\alpha_1=\varepsilon\varphi(\varphi)=\frac{u_2-u_1}{t_2-t_1}=\frac{20-10}{5-0}=2\,m/s^2$$

Από το εμβαδόν θα υπολογίζουμε το διάστημα:

$$s_1=\frac{(B+\beta)\upsilon}{2}=\frac{(20+10)5}{2}=75\,m$$

Το όχημα κινείται ευθύγραμμα συνεχώς προς την θετική κατεύθυνση, επομένως η μετατόπιση είναι σε μέτρο ίση με το διάστημα και έχει θετική κατεύθυνση:

$$\Delta x_1=+75\,m$$

Η εξίσωση της κίνησης (θέσης) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{u}_0\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot(t-t_0)^2 \text{ ή}$$

$$x_1(t)=0+10(t-0)+\frac{1}{2}\cdot 2(t-0)^2 \text{ ή}$$

$$x_1(t)=10t+t^2, t\in[0,5s)$$

ενώ η εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\vec{u}=\vec{u}_0+\vec{a}\cdot(t-t_0) \text{ ή}$$

$$u_1(t)=10+2(t-0) \text{ ή}$$

$$u_1(t)=10+2t, t\in[0,5s)$$

Στο τέλος αυτής της διαδρομής (την χρονική στιγμή 5s) το όχημα βρίσκεται στην θέση $x_1(5)=75\,m$

(β) στο χρονικό διάστημα $t\in[5s,15s)$ το όχημα εκτελεί ΕΟΚ κίνηση. Εδώ το όχημα κινείται συνεχώς με σταθερή ταχύτητα $20\,m/s$. Η επιτάχυνσή του είναι

$$\alpha_2=0$$

Από το εμβαδόν θα υπολογίσουμε το διάστημα:

$$s_2=B\cdot u=10\cdot 20=200\,m$$

Το όχημα κινείται ευθύγραμμα συνεχώς προς την θετική κατεύθυνση, επομένως η μετατόπιση είναι σε μέτρο ίση με το διάστημα και έχει θετική κατεύθυνση:

$$\Delta x_2=+200\,m$$

Η εξίσωση της κίνησης (θέσης) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{u}\cdot(t-t_0) \text{ ή}$$

$$x_2(t)=75+20(t-5), t\in[5s,15s)$$

ενώ η εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι σταθερή:

$$u_2(t)=20, t\in[5s,15s)$$

Στο τέλος αυτής της διαδρομής (την χρονική στιγμή 15s) το όχημα βρίσκεται στην θέση:

$$x_2(15)=275\,m$$

(γ) στο χρονικό διάστημα $t\in[15s,20s)$ το όχημα εκτελεί ΕΟΜ κίνηση. Έχει αρχική ταχύτητα 20m/s και μετά ελαττώνει την ταχύτητα με σταθερό ρυθμό (σταθερή επιβράδυνση) που θα την υπολογίσουμε από την κλίση.

Παίρνουμε δύο σημεία:

$$(t_1,u_1)=(15,20) \text{ και } (t_2,u_2)=(20,0)$$

και από τον παρακάτω τύπο υπολογίζουμε την επιτάχυνση:

$$\alpha_3=\varepsilon\varphi(\varphi)=\frac{u_2-u_1}{t_2-t_1}=\frac{0-20}{20-15}=-4\,m/s^2$$

Από το εμβαδόν θα υπολογίζουμε το διάστημα:

$$s_3=\frac{B\cdot\upsilon}{2}=\frac{5\cdot 20}{2}=50\,m$$

Το όχημα κινείται ευθύγραμμα συνεχώς προς την θετική κατεύθυνση, επομένως η μετατόπιση είναι σε μέτρο ίση με το διάστημα και έχει θετική κατεύθυνση:

$$\Delta x_3 = +50\,m$$

Η εξίσωση της κίνησης (θέσης) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot (t - t_0)^2 \text{ ή}$$

$$x_3(t) = 275 + 20(t - 15) - \frac{1}{2} \cdot 4(t - 15)^2 \text{ ή}$$

$$x_3(t) = 275 + 20(t - 15) - 2(t - 15)^2, t \in [15\,s, 20\,s)$$

ενώ η εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) \text{ ή}$$

$$u_3(t) = 20 - 4(t - 15), t \in [15\,s, 20\,s) \text{ ή}$$

Στο τέλος αυτής της διαδρομής (την χρονική στιγμή 20s) το όχημα βρίσκεται στην θέση:

$$x_3(20) = 325\,m$$

(δ) στο χρονικό διάστημα $t \in [20\,s, 25\,s)$ το όχημα εκτελεί ΕΟΜ κίνηση. Εδώ τώρα προσέξτε ότι το όχημα έχει μηδενική αρχική ταχύτητα και από εδώ και πέρα αρχίζει να αυξάνει το μέτρο της ταχύτητάς του αλλά προς την αρνητική κατεύθυνση. Δηλαδή η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.

Παίρνουμε δύο σημεία:

$$(t_1, u_1) = (20{,}0) \text{ και } (t_2, u_2) = (25, -20)$$

και από τον παρακάτω τύπο υπολογίζουμε την επιτάχυνση:

$$\alpha_4 = \varepsilon\varphi(\varphi) = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1} = \frac{-20 - 0}{25 - 20} = -4\,m/s^2$$

Γενικά, το πρόσημο της επιτάχυνσης δεν μπορεί να χαρακτηρίσει την κίνηση ως επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη. Πρέπει να εξετάσετε την κατεύθυνση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης

(ι) αν έχουν ίδιο πρόσημο, τότε έχουμε επιτάχυνση $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{a}$ ή $\vec{u} \cdot \vec{a} = 1$ ενώ,

(ιι) αν έχουν αντίθετο πρόσημο, τότε έχουμε επιβράδυνση $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{a}$ ή $\vec{u} \cdot \vec{a} = -1$

Επομένως εδώ, έχουμε επιταχυνόμενη κίνηση αφού η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αρνητική (ίδια) κατεύθυνση.

Από το εμβαδόν θα υπολογίζουμε το διάστημα:

$$s_4 = \frac{B \cdot \upsilon}{2} = \frac{5 \cdot 20}{2} = 50\,m$$

Προσοχή, το εμβαδόν και το διάστημα είναι πάντα θετικές ποσότητες.

Το όχημα κινείται ευθύγραμμα συνεχώς προς την αρνητική κατεύθυνση αφού η ταχύτητα είναι συνεχώς αρνητική, επομένως η μετατόπιση είναι σε μέτρο ίση με το διάστημα και έχει αρνητική κατεύθυνση:

$$\Delta x_4 = -50\,m$$

Η εξίσωση της κίνησης (θέσης) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot (t - t_0)^2 \text{ ή}$$

$$x_4(t) = 325 + 0(t - 20) - \frac{1}{2} \cdot 4(t - 20)^2 \text{ ή}$$

$$x_4(t) = 325 - 2(t - 20)^2, t \in [20\,s, 25\,s)$$

ενώ η εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) \text{ ή}$$

$$u_4(t) = 0 - 4(t - 20) \text{ ή}$$

$$u_4(t) = -4(t - 20), t \in [20\,s, 25\,s)$$

Στο τέλος αυτής της διαδρομής (την χρονική στιγμή 20s) το όχημα βρίσκεται στην θέση:

$$x_4(25) = 275\,m$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την συνολική μετατόπιση του οχήματος:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 \text{ ή}$$

$$\Delta x = 75 + 200 + 50 - 50 = 275\,m$$

ενώ το συνολικό διάστημα είναι:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \text{ ή}$$

$$s = 75 + 200 + 50 + 50 = 375$$

Τέλος η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα των $\Delta t = 25\,s$ είναι:

$$u_\mu = \frac{s}{\Delta t} = \frac{375}{25} = 15\,m/s$$

Το έγγραφο που έχετε μπροστά σας είναι ειδικά κατασκευασμένο για την εύκολη ανάγνωση στην οθόνη ενός συνηθισμένου Laptop με μέγεθος οθόνης 38x20cm. Το μέγεθος του χαρτιού είναι ειδικά σχεδιασμένο για την πλήρη εμφάνιση κάθε σελίδας στην οθόνη, σε πλήρη προβολή από έναν κοινό φυλλομετρητή.

Στον Firefox χρησιμοποιείστε το πλήκτρο F11 για να μεταβείτε σε πλήρη οθόνη.

Για να μεταβείτε στην επόμενη σελίδα πατήστε SPACE ενώ για την προηγούμενη πατήστε Shift-SPACE.

Αν θέλετε να μεγεθύνετε την σελίδα, π.χ. για να διαβάσετε κάποιο σχήμα μπορείτε να μεγεθύνετε με Ctrl+ ή για να μειώσετε το μέγεθος με Ctrl-

Επίσης αν θέλετε να αναζητήσετε κάποια συμβολοσειρά μέσα στο έγγραφο πατήστε Ctrl-F και μετά στο παράθυρο που θα ανοίξει την συμβολοσειρά που θέλετε να αναζητήσετε, π.χ. για να βρείτε την άσκηση 9 πατήστε "Α9".

Ενώ για να μεταβείτε σε κάποια σελίδα πατήστε Ctrl-Alt-G και εισάγετε τον αριθμό της σελίδας.